

EPISTEMISCHE LOGIK

Beschränktes Logikwissen

Manuel Bremer

University of Düsseldorf, Germany
www.mbph.de

Logische Idealisierung

- In der Epistemischen Logik werden i.d.R. massive Idealisierungen bezüglich der logischen Kompetenz der Subjekte gemacht. Dazu zählen insbesondere die *Logische Allwissenheit*: $\vdash \varphi \rightarrow \vdash W_a \varphi$

für Wissen und andere epistemische Zustände sowie der mit *Epistemischer Abtrennung* sich daraus ergebende *Logische Abschluss*:

$$\vdash \varphi \supset \psi \rightarrow \vdash W_a \varphi \supset W_a \psi$$

Gliederung der Darstellung

1. Prinzipien des logischen Abschlusses und der Konsistenz werden dargestellt und diskutiert.
2. Ansätze zum Umgang mit der Problematik beschränkten Logikwissens
3. Ein Ansatz zum subjektrelativen Logikwissen
4. Prinzipien der Selbst- und Fremdzuschreibung von Wissen und Glauben
5. Problematik epistemischer Introspektionsprinzipien

Definitionen

- D 1 $W_{ap} \stackrel{\text{def}}{=} p \wedge G_{ap}$ Wissen ist wahre Meinung.

Es wird also nicht *per se* angenommen, dass Wissen begründet sein *muss*: man kann zufällig etwas wissen.
[Das ist eine kontroverse These, die hier nicht weiter diskutiert wird.]

- D 2 $M_{ap} \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\exists q)(G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p))$

Man hält etwas für möglicherweise wahr, wenn man nichts meint, von dem man meint, dass es dieses ausschließt.
[Auch diese Definition ist eigens zu motivieren und ebenfalls nicht unkontrovers. Vgl. „Für-möglich-Halten“]

Endliche epistemische Subjekte

- Gezielt wird auf eine Modellierung von epistemischen Subjekten, die endlich lange Zeit zum Rasonieren besitzen und über endliche Speicherkapazitäten verfügen – wie menschliche Personen mutmaßlich (jedenfalls im Diesseits).
- Damit können wir feststellen:

$$\neg(\exists a)(\forall t)W_{at}$$

Begründung?

$$(\exists a)(\forall t)W_{at}$$

denn die Menge der Wahrheiten ist unendlich:

$$p \supset p, p \supset p \vee p_2, p \supset p \vee p_3, \dots$$

Ein endliches Subjekt kann sie also nicht gleichzeitig wissen, da es sie nicht gleichzeitig repräsentieren kann.

- Positiv gewendet (als Nichtallwissenheitsaxiom):

$$\text{Axiom} \vdash (\forall a)(\exists t)\neg W_{at}$$

[Bei welcher Lesart von Glauben (Aktvollzug vs. Disposition) ist dieses Argument überzeugender?]

- Das Argument über die unendliche Anzahl der Sätze (und damit der Wahrheiten einer Sprache) scheint schwächer, sofern wir Glauben als Disposition betrachten (also nicht alle Wahrheiten *gleichzeitig* bedenken müssen).

Dennoch sind einige Sätze *zu lang*, um sie überhaupt bedenken zu können. D.h. auch wenn wir – wie hier – epistemische Zustände als Dispositionen auffassen, sprechen Komplexitätsüberlegungen zu Sätzen und mentalem Arbeitsspeicher für das Nichtallwissenheitsaxiom.

Wir meinen zu wissen, was wir behaupten

- Wir können “ $\vdash$ ” auffassen als Ausdruck der Beweisbarkeit (sei es als Axiom oder als Theorem). Weiter verstanden kann „ $\vdash$ “ alles betreffen, was wir (unumstößlich) behaupten.
- Insbesondere im letzteren Sinne sollte gelten, dass wenn wir etwas behaupten, wir auch behaupten, dass wir es wissen:

$$\vdash p \rightarrow \vdash W_{ap} \qquad \text{bzw.} \qquad \vdash p \rightarrow \vdash W_{ip}$$

- „ $\vdash$ “ als Beweisbarkeit im Rahmen einer Logik verstanden (etwa PL1) hieße, dass

$$\vdash p \rightarrow \vdash W_{ap} \quad \text{bzw.}$$

$$\vdash p \rightarrow \vdash W_{ip}$$

Logische Allwissenheit ausdrückt: Jedes Theorem wird (von allen und insbesondere mir) gewusst!

- Logische Allwissenheit in diesem Sinne ist eine sehr starke Idealisierung und darum kontrovers.
- Hier wird diese Idealisierung *nicht* gemacht! Logische Allwissenheit soll nicht *im Allgemeinen* gelten.

Logische Allwissenheit, Deduktiver Abschluss und Epistemische Konditionalisierung

• Drei Prinzipien(schemata) sind zu unterscheiden für einen der epistemischen Kontexte φ (W/Ü/G/M):

- (i) Logische Allwissenheit: $\vdash p \rightarrow \vdash \varphi_a p$
- (ii) Deduktiver Abschluss: $\varphi_a p, \vdash p \supset q \rightarrow \varphi_a q$
- (iii) Epistemische Konditionalisierung:

$$\vdash \varphi_a p \wedge \varphi_a(p \supset q) \supset \varphi_a q$$

(i) und (ii) werden hier abgelehnt.

Epistemische Konditionalisierung

- Der Ausdruck „Epistemische Konditionalisierung“ ist angelehnt an die Rede von Konditionalisierung in der Wahrscheinlichkeitstheorie

[$\text{Prob}(A/B)=r$, B gegeben $\rightarrow \text{Prob}(A) = r$].

- Hält man das Antecedenz eines Konditionals, das man für wahr hält, für wahr, sollte man das Konsequenz für wahr halten.

- Dies entspricht *Modus Ponens*. Insofern lässt sich auch vom „Epistemischer Abtrennung“ reden, was im Folgenden in der Regel auch geschieht, abgekürzt „EA“.
- Es handelt sich um eine Abtrennung komplett *innerhalb* eines epistemischen Kontextes.
- Es muss also unterschieden werden zwischen

$$W_a p, \vdash p \supset q \rightarrow W_a q$$

was hier *nicht* angenommen wird,
und

$$W_a p, W_a(p \supset q) \vdash W_a q$$

bzw.

$$\vdash W_a p \wedge W_a(p \supset q) \supset W_a q$$

bzw.

$$\vdash W_a(p \supset q) \supset (W_a p \supset W_a q)$$

was angenommen wird.

- Angenommen

$$\vdash W_a(p \supset q) \supset (W_a p \supset W_a q)$$

ergibt sich aussagenlogisch

$$\vdash W_a p \wedge W_a(p \supset q) \supset W_a q \quad \text{und umgekehrt.}$$

„Anormale“ Epistemische Logik

- „Normale“ Modallogiken besitzen die Necessitationsregel:

$$\vdash p \rightarrow \vdash \Box p$$

- Eine Epistemische Logik ohne Logische Allwissenheit ist also in diesem Sinne „anormal“! [Modallogiken ohne Necessitation sind schwächer als die „Lewis“-Systeme, die mit S0.5 beginnen.]
- Epistemische Konditionalisierung entspricht dem sogenannten K-Axiom: $\vdash \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$.
- Deduktiver Abschluss ergibt sich aus K und Necessitation.

- Abgelehnt werden sollten also aus erkenntnistheoretischen Gründen uneingeschränkte Logische Allwissenheit und uneingeschränkter Logischer Abschluss.
- Alternativ ließe sich „ $\vdash$ “ auf die Logik (Menge der logischen Regeln) *beschränken*, die ein Subjekt bzw. eine Gruppe von Subjekten *kennt/beherrscht*. In diesem Falle wären einzelne Subjekte/Gruppen unterschiedlich zu modellieren. Sie teilen die basalen Prinzipien (wie $W_a p \supset p$).
- Diese Variante wird im Folgenden nicht verfolgt. Hier soll die Epistemischen Logik sich auf Axiom K (d.h. Epistemische Abtrennung) beschränken.

Variationen Epistemischer Abtrennung

- $W_ap, W_a(p \supset q) \vdash W_aq$ $\vdash W_ap \wedge W_a(p \supset q) \supset W_aq$
- $\ddot{U}_ap, \ddot{U}_a(p \supset q) \vdash \ddot{U}_aq$ $\vdash \ddot{U}_ap \wedge \ddot{U}_a(p \supset q) \supset \ddot{U}_aq$
- $G_ap, G_a(p \supset q) \vdash G_aq$ $\vdash G_ap \wedge G_a(p \supset q) \supset G_aq$

Die „G“-Variante gilt in probabilistischen Semantiken als problematisch, kann aber dem Prinzip des Schwächsten Kettengliedes folgen (ein Schluss ist genauso gut wie die schwächste Prämisse, muss aber nicht schwächer sein). In jedem Fall problematisch *erscheint*: $M_ap, M_a(p \supset q) \vdash M_aq$

Information besitzen

- Gegeben die Fragwürdigkeit Logischer Allwissenheit für normale epistemische Subjekte, könnte man einen weiteren epistemischen Zustand in die Modellierung einführen: eine Information besitzen (auch wenn man diese nicht kennt):

I_{ap}

[Ob Zustände dieser Art erkenntnistheoretisch von Interesse sind, hängt davon ab, ob man Personen modelliert, die introspektiv partiellen bewussten Zugang zu ihrem Wissen haben, oder

technische System der Informations-verarbeitung. Von diesen wird hier abgesehen.]

- Da Informationszusammenhänge objektiv bestehen und keine Einsicht erfordern, kann hier gelten:

$$I_a p, \vdash p \supset q \rightarrow I_a q$$

Man hat all die Information, die eine Information, die man hat, impliziert.

Jon Barwise bemerkt an einer Stelle, welche das Problem der Logischen Allwissenheit diskutiert:

„Information travels at the speed of logic, knowledge doesn't.“

Konsistenzprinzipien

- Im Allgemeinen (d.h. Besonderheiten von Paradoxien nicht beachtend) stellen Konsistenzbedingungen minimale Bedingungen für Rationalität dar.
- Man *sollte* nicht (einfach) etwas und sein Gegenteil meinen: $\neg(G_a p \wedge G_a \neg p)$.
Dies (d.h. $G_a p \wedge G_a \neg p$) mag vorkommen, insofern man seine Meinungen nicht komplett überschaut, sollte jedoch nicht.
- Im Kontext einer konsistenten Logik muss auch Wissen konsistent sein. [Warum?]

- Angenommen: $W_a p \wedge W_a \neg p$

aufgrund von Veritativität: $p \wedge \neg p$

was aber in einer konsistenten Logik nicht vorliegen kann.

Direkte Konsistenzprinzipien

- In dieser Form treten direkte Konsistenzprinzipien auf:

$$\text{Axiom } \vdash G_a p \supset \neg G_a \neg p \quad [\equiv \neg(G_a p \wedge G_a \neg p)]$$

Dieses Prinzip drückt eindeutige Festlegung aus.

Daraus folgt: $W_a p \supset \neg W_a \neg p$ [Warum?]

- Entsprechend: $\ddot{U}_a p \supset \neg \ddot{U}_a \neg p$
- Nicht zwingend *erscheint*: $\neg(M_a p \wedge M_a \neg p)$

[Warum?]

Die Rolle der Konsistenz von $\vdash$

- Gegeben eine konsistente Logik: $\nvdash \perp$

Dann können wir auch nicht haben: $W_a p \wedge W_a \neg p$, ebenso wenig $W_a(p \wedge \neg p)$, sowieso nicht $W_a p \wedge \neg W_a p$. [s.o.]

- Gegeben eine inkonsistente Logik erhalten wir mit $\vdash (p \wedge \neg p)$ und einem Abschlussprinzip genau solche Formeln.

Indirekte Konsistenzprinzipien

- Andere Konsistenzprinzipien drücken entweder den Zusammenhang epistemischer Zustände aus, etwa:

$$\neg(\ddot{U}_a p \wedge M_a \neg p) \quad [\text{insofern } M_a p \supset \neg \ddot{U}_a \neg p]$$

- Konsistent ist: $G_a(p \wedge \neg(\exists b)W_b p)$

gegeben etwa eine Begründungskomponente im Wissensbegriff, mit dem schwachen Wissensbegriff scheint sich ein Problem zu ergeben.

[Warum?]

- Angenommen: $G_a(p \wedge \neg(\exists b)W_bp)$

also $[\exists/\forall]: G_a(p \wedge (\forall b)\neg W_bp)$

also $[\forall B]: G_a(p \wedge \neg W_ap)$

also [Df. “W”]: $G_a(p \wedge \neg(G_ap \wedge p))$

Kann man dies konsistent meinen?

- Angenommen: $G_a(p \wedge \neg(G_ap \wedge p))$

Mit einem Distributionsprinzip $G_a(p \wedge q) \supset G_ap \wedge G_aq$ und [AL] gilt: $G_ap \wedge G_a(G_ap \supset \neg p)$

also [AL, EA]: $G_ap \wedge (\neg G_aG_ap \vee G_a\neg p)$

also [AL]: $G_ap \wedge \neg G_aG_ap \vee G_ap \wedge G_a\neg p$

also [$\vee$ B, Konsistenz]: $G_ap \wedge \neg G_aG_ap$

- $G_ap \wedge \neg G_aG_ap$ widerspricht einem Prinzip der Positiven Introspektion $G_ap \supset G_aG_ap$, das zumindest in einer dispositionalen Lesart von „G“ einige Plausibilität hat (s.u.).

- Problematischer ist das Distributionsprinzip höchstens in die andere Richtung, sofern man seine Meinungen nicht überblickt: $G_a p \wedge G_a q \supset G_a(p \wedge q)$?

- Wir nehmen weiter unten als Axiom ein *Distributionsaxiom* an, dass man alle Konjunkte einer geglaubten Konjunktion glauben muss:

$$\vdash G_a(p \wedge q) \equiv G_a p \wedge G_a q$$

- Angenommen Positive Introspektion (für „G“) und den schwachen Wissensbegriff ist

$$G_a(p \wedge \neg(\exists b)W_bp)$$

also inkonsistent, d.h. $\vdash G_ap \supset \neg G_a\neg(\exists b)W_bp$

- $G_ip \wedge \neg G_iG_ip$ kann in keinem Fall von mir *behauptet* werden ohne, dass ich mir zu widersprechen scheine.

Widersprüche der Ersten Person

- Das vorliegende Beispiel weist scheinbar auf die besondere Rolle der Ersten Person und ihrer Behauptungen über sich selbst hin:

$$G_{ap} \wedge \neg G_a G_{ap}$$

mag *scheinbar* von außen attestiert werden (also von jemand über mich behauptet werden), aber

$$G_{ip} \wedge \neg G_i G_{ip}$$

Lässt sich nicht von mir behaupten. [Warum „scheinbar“?]

Starke Zuschreibungsprinzipien

- Wenn wir tatsächlich Prinzipien der Positiven Introspektion (u.a.) annehmen, postulieren wir damit auch die Konsistenz *aller* epistemischen Subjekte, d.h.

$$G_{ap} \wedge \neg G_a G_{ap}$$

lässt sich – gegeben diese Annahmen – selbst aus der Dritten Person nicht behaupten!

Widersprüche des Behauptens

- Trotz der eingeschränkten Sonderrolle der Ersten Person, gibt es einen Unterschied bei Sätzen, die konsistent von niemand selbst behauptet werden können, die jedoch *wahr sein* können, also eventuell sogar Theoreme eines objektiven Systems mit entsprechender Logik sind.
- $W_i(p \wedge \neg(\exists_a)W_ap)$ ist klarerweise (gegeben Distribution und Veritativität, selbst ohne Introspektion) inkonsistent.
- $p \wedge \neg(\exists_a)W_ap$ kann jedoch *wahr sein*.

[Eine Debatte sogenannter ‚Moore’scher Paradoxien‘ knüpft hier an.]

Wahrsein vs. Theoremsein

- $p \wedge \neg(\exists a)W_{ap}$ kann zwar *wahr* sein, kann allerdings nicht in *jeder* Epistemischen Logik bezüglich einer *bestimmten* Proposition „p“ ein Theorem sein!

[Warum bzw. wann nicht?]

- Angenommen: $\vdash p \wedge \neg(\exists_a)W_ap$

Mit Prinzipien der Logischen Allwissenheit, Veritativität und $\wedge$ -Distribution erhalten wir:

$$\vdash W_a(p \wedge \neg(\exists_a)W_ap)$$

$$\text{also: } \vdash W_ap \wedge W_a\neg W_ap$$

$$\text{also: } \vdash W_ap \wedge \neg W_ap \not\vdash$$

- Die Endlichkeit der Subjekte müsste also ausgedrückt werden: $\vdash(\exists p)(p \wedge \neg(\exists_a)W_ap)$

[Blockt dies den obigen Beweis?]

- Angenommen: $\vdash (\exists p)(p \wedge \neg(\exists_a)W_{ap})$

$(\exists B)$ wäre hier problematisch für ein konkretes p , insofern später dieses – per Logischer Allwissenheit – in den Kontext von „ W “ rückt.

Logische Allwissenheit kann also in einer Epistemischen Logik, die $\vdash (\exists p)(p \wedge \neg(\exists_a)W_{ap})$ als Theorem haben will, nicht uneingeschränkt gelten!

- Eine Epistemische Logik mit Logischer Allwissenheit könnte zwar in der Metasprache sagen, dass es nicht-gewusste Wahrheiten gibt, aber nicht im System selbst, solange es keine weiteren Operatoren hierfür gibt.

Erinnerung: basale, idealisierende Axiome

- Axiom $\vdash W_a p \supset p$
- Axiom $\vdash G_a(p \supset q) \supset (G_a p \supset G_a q)$
 $\vdash \ddot{U}_a(p \supset q) \supset (\ddot{U}_a p \supset \ddot{U}_a q)$
- Axiom $\vdash \ddot{U}_a p \supset G_a p$

- Axiom $\vdash W_a(p \vee \neg p)$

Das letzte Axiom besagt: Einige Axiome/Theoreme sind Wissenden bekannt, auch wenn keine Logische Allwissenheit gilt.

- Hingegen kein Axiom, sondern *falsch* ist: $W_a p \vee W_a \neg p$, Wissen ist nicht ‚maximal‘.

- Variante eines Konsistenz-Axioms:

$$\vdash G_a p \supset \neg G_a \neg p$$

[Man dies später als Theorem behandeln, wenn man eine andere Variante eines Konsistenzaxioms empfiehlt.]

- Sofern wir eine Modellierung von wirklichen epistemischen Subjekten anstreben, wäre besser auf Konsistenzpostulate zu verzichten. Unsere Meinungen können – mindestens implizit – inkonsistent sein.

- Hier empfiehlt sich also eine parakonsistente Logik, zumindest im Skopus der epistemischen Operatoren. Mindestens muss gelten, dass Subjekte nicht per *ex falso quodlibet* schließen, dies also bei [EA] keine Rolle spielt.
- Verzichtet man auf Konsistenzprinzipien können Widersprüche im Skopus von epistemischen Operatoren auftreten, die Logik, die von entsprechenden epistemischen Zuschreibungen handelt (d.h. die Logik außerhalb der Operatoren) muss *deswegen* nicht parakonsistent sein.

- Aus der Definition von „ $M_a p$ “ ergibt sich mit dem möglichen Konsistenzaxiom $\vdash G_a p \supset \neg G_a \neg p$ und EA:

$$\vdash G_a p \supset M_a p$$

[Warum?]

- Angenommen: $(\exists q)(G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p))$

also $[\exists B]: G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p)$

also $[EA]: G_a \neg p$

also $[Konsistenz]: \neg G_a p$

also $[\supset E, Df. „M“]: \neg M_a p \supset \neg G_a p$

also $[AL] G_a p \supset M_a p$

- In den dritten Schritt geht eine weitere Annahme ein.
[Welche?]

Ansätze zum beschränkten Logikwissen

- Die Idealisierungen logischen Wissen in der Epistemischen Logik sind für endliche Subjekte zu stark.
- Selbst für technische Systeme bleiben sie problematisch aufgrund ihres Charakters der Idealisierung der für eine Herleitung benötigten Ressourcen (insbesondere Zeit) (i) als auch insofern einige dieser Systeme (menschliche) Personen modellieren oder simulieren wollen (ii).
- Es wurden deshalb Ansätze entwickelt, eine begrenzte logische Kompetenz zu modellieren.

- Um deren Umfang zu beurteilen, gibt es eine Liste der problematischen Idealisierungen.
- Diese Liste wird hier bezüglich des Glaubens betrachtet; ähnliche Überlegungen lassen sich dann für andere epistemische Zustände anstellen.
- Nicht alle Einträge auf der Liste sind gleichermaßen problematisch. Alle gelten in der Standard Epistemischen Logik für „G“.
- Da im Folgenden intersubjektive epistemische Zustände keine besondere Rolle spielen wird er auf ein Subjekt verweisende Index unterdrückt.

- (L1) $G\phi \wedge G(\phi \supset \psi) \supset G\psi$ (Epistemische Abtrennung)
- (L2) $\vdash \phi \rightarrow \vdash G\phi$ (Logische Allwissenheit)
- (L3) $\vdash \phi \supset \psi \rightarrow \vdash G\phi \supset G\psi$ (Logische Abtrennung)
- (L4) $\vdash \phi \equiv \psi \rightarrow \vdash G\phi \equiv G\psi$ (Nicht-Opazität)
- (L5) $G\phi \wedge G\psi \supset G(\phi \wedge \psi)$ (Abschluss unter Konjunktion)
- (L6) $G\phi \supset G(\phi \vee \psi)$ (Abschwächung)
- (L7) $G\phi \supset \neg G\neg\phi$ (Konsistenz)
- (L8) $G(G\phi \supset \phi)$ (Annahme des korrekten Glaubens)
- (L9) $G\alpha$ (Glauben des logischen Wahren)
- (L10) $G\phi \wedge G\neg\phi \supset G\psi$ (Epistemisches *falseo ad quodlibet*)

Ansatz 1. Für-möglicherweise-wahr-Halten

- Ausgehend von: $M\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \neg G\neg\varphi$

als Variante des Für-möglicherweise-wahr-Haltens, könnte man sich überlegen, darin den eigentlich gesuchten Begriff des Für-wahr-Haltens (Meinens) zu sehen.

- Zur Erinnerung: Es geht um Für-möglicherweise-wahr-Halten und nicht um Für-möglich-Halten:

$$\neg(M\varphi \equiv G\Diamond\varphi)$$

- Semantisch entspräche dem

$$w \models M\phi \text{ gdw. } \exists w' (Rww' \wedge w' \models \phi)$$

Der Aspekt des Gewissseins wird damit aus dem Meinen ausgeschlossen, aber zugleich scheint die Einstellung zu schwach, um Glauben zu erfassen, wo Geglaubtes als sicherer gilt als sein Gegenteil.

- Aufgrund dieser epistemischen Schwäche des Für-möglicherweise-wahr-Haltens gelten zusammenfassende logische Prinzipien für es eher nicht, denn die Unsicherheit sollte beim Zusammenfassen zunehmen.

Konsequenzen

- Bezüglich logischen Wissens gelten nun nicht:

(i) $PM\varphi \wedge M(\varphi \supset \psi) \supset M\psi$ [vs. L1]

(ii) $PM\varphi \wedge M\psi \supset M(\varphi \wedge \psi)$ [vs. L5]

(iii) $PM\varphi \supset \neg M\neg\varphi$ [vs. L7]

(iv) $P\varphi \supset M\varphi$

Mit L1 und L5 gelten zwei wünschenswerte Eigenschaften für Glauben hier nicht.

- Es gelten allerdings:

- (i) $\models M(M\phi \supset \phi)$ [L8]
- (ii) $\models M\phi \supset MM\phi$ [S4]
- (iii) $\models \neg M\phi \supset M\neg M\phi$ [S5]
- (iv) $\vdash \phi \equiv \psi \rightarrow \vdash M\phi \equiv M\psi$ [L4]
- (v) $\vdash \phi \rightarrow \vdash M\phi$ [L2]
- (vi) $\vdash \phi \supset \psi \rightarrow \vdash M\phi \supset M\psi$ [L3]
- (vii) $\models M\phi \supset M(\phi \vee \psi)$ [L6]
- (viii) $\models M\alpha$ [L9]
- (ix) $\models M\phi \vee M\psi \equiv M(\phi \vee \psi)$ [Abschluss unter „ $\vee$ “]

- L8 sollte gelten, da man immer das Gelingen des eigenen Glaubens – sei dies auch ein schwacher Glaube – einräumen sollte.
- Die problematischeren Einträge auf der Liste L bleiben allerdings auch gültig.
- Hinzukommt die problematische Eigenschaft (ix), aufgrund der Maximalität möglicher Welten, wobei (ix) für Glauben nicht gelten sollte, denn sonst:
$$G(\varphi \vee \neg\varphi) \supset G\varphi \vee G\neg\varphi \quad [\text{Maximalität!}]$$
- Da dies zur Schwierigkeit hinzutritt, „M“ als Modellierung des Glaubens zu wählen, bewährt sich Ansatz 1 somit nicht.

Ansatz 2. Implizites und explizites Glauben

- Man könnte den Operator „G“ spalten in „G_i“ und „G_e“ für ‚implizites‘ und ‚explizites‘ Glauben. Während die logischen Idealisierungen für implizites Glauben gelten, gelten sie nicht für explizites Glauben. Impliziter Glauben entspricht dann eher der objektiven logischen Datenverarbeitung.
- Die einfachere Modellierung ist, Glauben nur im Sinne des expliziten Glaubens zu verstehen. Impliziter Glaube entspricht eher dem epistemischen Zustand $I_a\phi$.

- Statt konsistenter und maximaler möglicher Welten dienen in der Semantik ‚Situationen‘, die unvollständig und auch inkonsistent sein können, als epistemische Alternativen.
- Die mögliche Inkonsistenz wird dadurch modelliert, dass die Bewertungen ‚falsch‘ v_F und ‚wahr‘ v_T semantisch voneinander *unabhängig* sind. Es gibt also eine zweifache Interpretation von Formeln.
- G sei die Menge der epistemischen Alternativen. Diese kann leer sein! Ist G nicht leer, sind sich die Elemente wechselseitig zugänglich, d.h. S4 und S5 gelten. Dann wird die Semantik des expliziten Glaubens bestimmt durch die folgenden Regeln:

- (i) $s \models_T p$ gdw. $v_T(s,p) = \text{true}$
- (ii) $s \models_F p$ gdw. $v_F(s,p) = \text{true}$
- (iii) $s \models_T(\varphi \vee \psi)$ gdw. $s \models_T \varphi$ oder $s \models_T \psi$
- (iv) $s \models_F(\varphi \vee \psi)$ gdw. $s \models_F \varphi$ und $s \models_F \psi$
- (v) $s \models_T(\varphi \wedge \psi)$ gdw. $s \models_T \varphi$ und $s \models_T \psi$
- (vi) $s \models_F(\varphi \wedge \psi)$ gdw. $s \models_F \varphi$ oder $s \models_F \psi$
- (vii) $s \models_T \neg \varphi$ gdw. $s \models_F \varphi$
- (viii) $s \models_F \neg \varphi$ gdw. $s \models_T \varphi$
- (ix) $s \models_T G\varphi$ gdw. $s' \models_T \varphi$ für alle $s' \in G$
- (x) $s \models_F G\varphi$ gdw. $s \not\models_T G\varphi$

- Aufgrund (i), (ii) und (vii) sind kontradiktorische Bewertungen möglich: $\exists s(s \models_{\tau}(\varphi \wedge \neg\varphi))$
- Aufgrund von (i) und (ii) – der Unabhängigkeit von v_{τ} und v_{f} sind Wahrheitswertlücken möglich: $\exists s(s \not\models_{\tau}(\varphi \vee \neg\varphi))$
- ‚Gültigkeit‘ wird definiert als Wahrheit in allen Modellen in allen möglichen *Welten* (d.h. nur den maximalen und konsistenten Situationen).

• Die folgenden Gültigkeiten bestehen:

$$(i) \quad \models G\varphi \supset GG\varphi \quad [S4]$$

$$(ii) \quad \models \neg G\varphi \supset G\neg G\varphi \quad [S5]$$

$$(iii) \quad \models G\varphi \wedge G\psi \supset G(\varphi \wedge \psi) \quad [L5]$$

$$(iv) \quad \models G(G\varphi \supset \varphi) \quad [L8]$$

- Aus der Semantik ergeben sich auch Ungültigkeiten:

(i) $\not\models G\phi \wedge G(\phi \supset \psi) \supset G\psi$ [vs. L1]

(ii) $\not\models \neg G\perp$ [vs. L7]

denn eine unvollständige Situation kann ϕ und $\phi \supset \psi$ wahrmachen ohne ψ zu enthalten, daher (i).

- Relativ zu irgendwelchen – insbesondere unvollständigen oder inkonsistenten – Situationen lassen sich folgende Sätze oder Satzmenge*n* *erfüllen* (das kann dann dazu dienen, beschränktes logischen Wissen zu modellieren):

- (i) $G(p \wedge q)$ [für beliebige Elementarsätze!]
- (ii) $\neg G(\varphi \wedge \psi \supset \varphi)$ [vs. L3, L2, L4]
- (iii) $G(\varphi \wedge \psi) \wedge G\neg\varphi \wedge G\neg\psi$ [vs. L7]
- (iv) $\neg G\varphi \wedge \neg G\neg\varphi$
- (v) $G(\varphi \vee \neg\varphi) \wedge \neg G\varphi \wedge \neg G\neg\varphi$
- (vi) $G\varphi, G(\varphi \supset \psi), \neg G\psi$ [vs. L1]
- (vii) $\neg G(\varphi \vee \neg\varphi)$ [vs. L9]
- (viii) $G\varphi, \neg G(\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi))$ [vs. L9, L2, L4]
- (ix) $G\varphi, G\neg\varphi, \neg G\psi$ [vs. L10]
- (x) $G\varphi \wedge G\neg\varphi$ [vs. L7]
- (xi) $G(\varphi \wedge \neg\varphi)$ [vs. L7]

- Nichterfüllbar sind die folgenden Sätze bzw. Satzmenge, sodass die entsprechenden Theoreme weiter gelten:

(i) $G(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg G\varphi \wedge \neg G\psi$ [L5]

(ii) $G\varphi, \neg G(\varphi \vee \psi)$ [L6]

- Damit bleiben aus der Liste L nur L5 und L8, die beide gelten sollten, und L6, das schon problematischer ist, übrig. Allerdings geht – in inkonsistenten Situationen – auch epistemische Abtrennung verloren [L1].

- Insofern nähert sich Ansatz 2 einem epistemologisch realistischeren Begriff des Glaubens an. Gilt allerdings selbst Epistemische Abtrennung nicht, bleibt von einer *Logik*

des Glaubens, in der es ja um Abschlusseigenschaften geht, nicht viel übrig.

- Gegeben größere Ausdrucksmöglichkeiten (etwa zum Ausdrücken der Annahme, in einer konsistenten Situation zu sein) ließe sich eine abgeschwächte Form von EA einführen (analog zu entsprechenden Vorgehensweisen bei Parakonsistenten Logiken bezüglich *Modus Ponens*).

Ansatz 3. Bekanntschaft und expliziter Glaube

- Einige Bedenken gegen logisches Wissen oder auch gegen Negative Introspektion gründen darin, dass hier Wissen bezüglich von Sätzen verlangt wird, die man noch nie gehört hat oder über deren Begrifflichkeit man nicht verfügt. Eine entsprechende Einschränkung einiger solchen Prinzipien begrenzt sich auf Anwendungen bezüglich von Sätzen, mit denen bzw. deren Begrifflichkeit man ‚bekannt‘ ist.
- Dazu dient der Operator „B“. Für jeden Akteur gibt es eine Menge der Sätze B , die bekannt sind. Ein Satz, der implizit geglaubt wird *und bekannt ist*, wird explizit geglaubt.

- Als Wahrheitsbedingung gilt: $s \models G_e \varphi$ gdw. $\varphi \in B \wedge G_i \varphi$
- „ G_i “ ist der übliche Glaubensbegriff.
- Gültig bleiben (bezüglich „ G_e “):
 - (i) $\neg G \perp$ [L7]
 - (ii) $\neg(G(\varphi \wedge \psi) \wedge G\neg\varphi \wedge G\neg\psi)$ [L7. φ, ψ bekannt!]
 - (iii) $\neg(G\varphi \wedge G\neg\varphi)$ [D, L7, entsprechend]
 - (iv) $\neg G(\varphi \wedge \neg\varphi)$ [L7, keine bewusste Kontradiktion]
 - (v) $G\varphi \wedge G\neg\varphi \supset G\psi$
 [L10! Dies ist kurios, insofern ψ nicht bekannt sein muss! Es gilt wegen (iii).]

Ungültig sind:

- (i) $G\varphi \wedge G(\varphi \supset \psi) \supset G\psi$
[vs. L1! Unter der Bedingung, dass Teilsätze bekannt sein müssen, würde L1 gelten.]
- (ii) $G\varphi \supset GG\varphi$
[vs. S4, Begriff *Glauben* evtl. nicht bekannt]
- (iii) $\neg G\varphi \supset G\neg G\varphi$ [vs. S5, entsprechend]
- (iv) $\vdash \varphi \rightarrow \vdash G\varphi$ [vs. L2]
- (v) $\vdash \varphi \supset \psi \rightarrow \vdash G\varphi \supset G\psi$ [vs. L3]
- (vi) $\vdash \varphi \equiv \psi \rightarrow \vdash G\varphi \equiv G\psi$ [vs. L4]
- (vii) $G\varphi \supset G(\varphi \vee \psi)$ [vs. L6]
- (viii) $G(G\varphi \supset \varphi)$ [vs. L8 in seiner Allgemeinheit, s.u.]

• Erfüllbar sind die folgenden Sätze bzw. Satzmengen:

- (i) $G(p \wedge q)$ [für beliebige Elementarsätze]
- (ii) $\neg G(\varphi \wedge \psi \supset \varphi)$ [vs. L2, unbekannte Tautologie]
- (iii) $G(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg G\varphi \wedge \neg G\psi$ [vs. L5, im Unterschied zu L7 oben müssen die Teilsätze nicht bekannt sein!]
- (iv) $\neg G\varphi \wedge \neg G\neg\varphi$ [Nicht-Maximalität, wie immer]
- (v) $G(\varphi \vee \neg\varphi) \wedge \neg G\varphi \wedge \neg G\neg\varphi$
- (vi) $\neg G(\varphi \vee \neg\varphi)$ [vs. L2, L9]
- (vii) $G\varphi \wedge \neg G(\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi))$ [vs. L2, L9, L6]

- Hat man nicht nur keine Teilsatzbedingung (dass die Teilsätze eines bekannten Satzes bekannt sein müssen), sondern eine atomistische Bekanntheitsrelation für beliebig komplexe Sätze wären sogar erfüllbar:

(i) $G(\varphi \wedge \psi), \neg G(\psi \wedge \varphi)$

(ii) $GG\varphi \wedge \neg G\varphi$

Dies ging sicherlich zu weit, insofern damit einfachste logische Satztransformationen (als immer logisch wahr seiend) ausgeschlossen werden. Wegen Problemen der Form (i) gilt L8 nicht: in $G\varphi$ kann φ anderes repräsentiert werden als im zweiten Auftreten von φ : $\not\models G(G\varphi \supset \varphi)$.

- Der Ansatz beseitigt somit einige der kontraintuitiven logischen Idealisierungen sowie die der Introspektion, ohne die Teilsatzbedingung werden jedoch auch elementare logische Fertigkeiten ausgeschlossen (wie EA).
- Erhebt man die Teilsatzbedingung werden L5 und L1 gültig, L6 bleibt indessen ungültig. Dies ähnelt Relevanzlogiken (und deren Bedingung des geteilten Inhalts bei Konditionalen und Folgerungen).
- Problematisch ist die Gültigkeit von L10.

Ansatz 4. Kontextuelles Rasonieren

- Inkonsistenz kann auch ohne inkonsistente Situationen modelliert werden, indem jedem epistemischen Subjekt *mehrere* Rahmen/Kontexte von epistemischen Alternativen zugeordnet werden.
- Es gibt dann einen kontextrelativen Glauben und einen uneingeschränkten Glauben (über alle Kontexte hinweg).
- Ohne Zugangsbedingungen zu und über die Kontexte gelten dann *keine* Introspektionsprinzipien für kontextrelativen Glauben (vs. S4 und S5).

- Der kontextrelative Glaube wird damit über Kontexte bestimmt. Deswegen können Konjunktionsprinzipien, die dann ja zwei getrennte Kontexte vereinen, nicht mehr gelten – vs. L1, L5. Dies ähnelt dem Verhalten von „ $\Diamond$ “:

$$\Diamond\varphi \wedge \Diamond(\varphi \supset \psi) \supset \Diamond\psi$$

gilt ja auch nicht.

- L10 gilt deshalb auch nicht.
- L8 kann falsch gemacht werden, indem in jedem Kontext ‚vorgestellt‘ werden kann, dass der Glaube falsch ist.

- Da die zugrundeliegenden Welten maximal und konsistent sind, gelten einige L7-Varianten, wie

$$\neg G\perp \quad \text{oder} \quad \neg G(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

aber verteilte Inkonsistenzen sind möglich:

$$G\varphi \wedge G\neg\varphi$$

da sich der Glaube auf verschiedene Kontexte verteilen kann.

- Aufgrund von Maximalität gilt L6.
- Insbesondere gelten Prinzipien der lokalen Logischen Allwissenheit (L2, L3, L4, L9).

- Insgesamt macht der Ansatz also gerade die akzeptableren Prinzipien (L1, L5, L8) ungültig und die unakzeptableren gültig (L2, L3, L4, L6, L9).
- Der Nutzen des Ansatzes bleibt daher auch sehr begrenzt. Insofern das Subjekt nicht quer zu Kontexten rasonieren kann, bringt deren gleichzeitige Modellierung auch keine Vorteile. Dies entspricht eher der Gleichzeitigkeit verschiedener möglicher Modelle (zu jeweiligen Kontexten).

Ansatz 5. Blinder Glaube

- Während andere Ansätze darauf zielen, welche Konsequenzen eines Glaubens man evtl. nicht glaubt, kann man auch einen Ansatz wählen, indem zu den festen Glaubenssätzen Prinzipien zählen, die selbst keine logische Abschlusseigenschaften (wie Konjunktionsbeseitigung) unterliegen müssen.

D.h. eine epistemische Alternative kann $\phi \wedge \psi$ als Prinzip enthalten, ohne ϕ oder ψ zu enthalten.

Damit stehen nahezu beliebige Glaubensinhalte offen!

- Die zugrundeliegenden Welten bleiben allerdings konsistent. Die Prinzipien selbst können inkonsistent sein, d.h. $\exists s(s \models G_p(\varphi \wedge \neg\varphi))$.

- Geglaubt wird relativ zu den epistemischen Alternativen (Glaube im bisherigen Sinne) und den Prinzipien:

$$s \models G_p \varphi \text{ gdw. } s \models G\varphi \text{ oder } \varphi \in \text{Prinzipien}(s)$$

- Wegen der Unabgeschlossenheit der Prinzipien können fast alle Abschlusseigenschaften ungültig gemacht werden:

L1, L3, L4, L5, L6, L7, L8, L10, S4, S5.

Beispiel: Man hält $\varphi \wedge \psi$ für ein Prinzip, also $G_p(\varphi \wedge \psi)$, aber – ohne konjunktiven Abschluss – nicht φ oder ψ : $\neg G_p\varphi$.

- Wegen der Logischen Allwissenheit bezüglich des herkömmlichen Glaubens bleiben allerdings: L2 und L9.
- Die eingeräumte mögliche Inkonsistenz bleibt nur harmlos, da gar keine Abschlussprinzipien mehr gelten!
- Damit steigert der Ansatz aber nur die Unplausibilität, da der entsprechende Glaubensbegriff keine interessante epistemologische Rolle mehr spielen kann.

- Ein ähnlicher Effekt lässt sich erzielen, wenn man neben den möglichen Welten unmögliche Welten zulässt, die jeden Satz atomistisch bewerten, d.h. deren Semantik noch nicht einmal kompositional ist!

Alle Prinzipien L1 – L10 können dann falsifiziert werden. –
Doch wozu?

Subjektrelatives Logikwissen

- Im Weiteren werden einige Theoreme als „1-Theoreme“ bezeichnet. In die Beweise von diesen Theoremen fließen Annahme über das logische Wissen von epistemischen Subjekten ein.

[Einige dieser Theoreme werden überflüssig, wenn man die entsprechend starken Axiome zum Logikwissen vorbringt.]

Beispiel I-Theorem

$$\vdash G_a(p \wedge q) \supset G_ap \wedge G_aq$$

Annahme: $G_a(p \wedge q)$

I-Wissen: $G_a(p \wedge q \supset p), G_a(p \wedge q \supset q)$

also [EA]: G_ap

also [EA] : G_aq

also [$\wedge$ E]: $G_ap \wedge G_aq$

also [$\supset$ E]: $G_a(p \wedge q) \supset G_ap \wedge G_aq$

Konjunktivität

- Wie verhält es sich mit der Konversen des gerade betrachteten I-Theorems?

$$G_a p \wedge G_a q \supset G_a(p \wedge q)$$

Auf der einen Seite scheint es zweifelhaft, dass wir (bewusst) alle unsere Meinungen überblicken, auf der anderen Seite sollten wir sie auch zusammen für wahr halten.

- Auch bei der Bildung der Konjunktion ließe sich ein entsprechendes I-Theorem formulieren. [Wie?]
- Das Bilden der Konjunktion ergibt sich durch folgende Annahme:

$$G_a(p \supset (q \supset (p \wedge q)))$$

Durch zweimalige epistemische Abtrennung und Importation ergibt sich: $G_ap \wedge G_aq \supset G_a(p \wedge q)$

- Wir können Konjunktivität als Axiom postulieren:

$$\text{Axiom} \vdash G_a p \wedge G_a q \equiv G_a(p \wedge q)$$

Das ist eine Idealisierung, allerdings eine sehr begrenzte.

- Dies ist eine Idealisierung *im Vergleich* zu den beiden 1-Theoreme.
- Beide 1-Annahmen (und entsprechend das Axiom) erscheinen jedoch als harmlose Wissensunterstellungen. Epistemischen Subjekten wird die Kenntnis der Konjunktion zugeschrieben.

1-Postulate

- Als Alternative zur Logischen Allwissenheit bieten sich Enumerationen von 1-Postulaten an (d.h. Listen von einfachen logischen Wahrheiten, die jeder als wissend angenommen werden kann).

- Beispiele:

1-Postulat $\vdash W_a(p \supset p \vee q)$

1-Postulat $\vdash W_a((p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p))$

- Das Axiom $\vdash W_a(p \vee \neg p)$ ist eigentlich auch nur ein 1-Postulat.
- Grundsätzlich sollten wir annehmen, dass alle Axiome auf der Liste der gewussten logischen Wahrheiten auftauchen, also insbesondere:

$$\text{1-Postulat} \quad \vdash W_a((\forall b)(\forall p)(W_b p \supset p))$$

$$\text{1-Postulat} \quad \vdash W_b((\forall a)(\forall p)(G_a p \supset \neg G_a \neg p))$$

usw.

- Sicher nicht auftauchen sollten in einer solchen Liste die von Relevanten Logiken kritisierten ‚Paradoxien der materialen Implikation‘ wie *ex falso quodlibet* (d.h.

$$p \wedge \neg p \supset q \quad \text{bzw.} \quad p \supset (\neg p \supset q)$$

Meta-Wissen der Ersten vs. Dritten Person

- Meta-Wissen kann einmal vorliegen als Wissen einer Person (*ego*) über die epistemischen Zustände einer anderen Person (*alter*). In der Epistemischen Logik spielt dieses intersubjektive Wissen i.d.R. eine untergeordnete Rolle. Zentral sind hingegen Prinzipien der Introspektion (des subjektiven Meta-Wissens).

- Würde man $G_{ap} \supset G_a G_{ap}$ als das tatsächliche Vollziehen eines weiteren Glaubensaktes verstehen, müsste dieser ja auch wieder geglaubt werden: $G_a G_{ap} \supset G_a G_a G_{ap} \dots$

So scheint der Geist an Glaubensakten überzulaufen.

- Hier zeigt sich (wieder), dass die Epistemische Logik nicht mit einer Philosophie des Geistes, welche sich um eine Theorie der Bewusstheit und der Reflexion kümmern muss, verwechselt werden darf. Beides leistet sie nicht!

- *Dispositional* machen die Iterationsprinzipien Sinn: Sie drücken Zugänglichkeit der eigenen epistemischen Zustände aus. Dies wird oft erkenntnistheoretisch verlangt (z.B. kann man die Kohärenz eigener Meinungen nur prüfen, wenn man Meinungen über sie bilden kann und sie einem selbst zugänglich sind.)

[So formuliert etwa Bonjour in seiner Kohärenztheorie des empirischen Wissens eine ‚doxastic presumption‘ der Zugänglichkeit.]

Spezifisches vs. generisches Meta-Wissen

- Meta-Wissen kann Wissen über Wissen spezifischer Subjekte sein $W_a G_b p$ oder es kann sich um generisches Meta-Wissen handeln, etwa $\forall a W_a \forall b W_b (p \vee \neg p)$.
- Generisches Meta-Wissen ist eine Komponente einer Theorie des kollektiven Wissens bzw. einer Theorie des geteilten (kollektiven) Wissens.

Meta-Wissen der Dritten Person

- Wenn *alter* etwa nicht weiß, kann *ego* dies problemlos wissen: $W_a \neg W_{bp}$. Es besteht auch kein Widerspruch zwischen nicht geteiltem Wissen: $W_a \neg W_{bp} \wedge W_{ap}$
- Es gilt ein Prinzip der Wissen Kooptation:

Theorem $\vdash W_a W_{bp} \supset W_{ap}$

denn man kann nur wissen, dass *alter* etwas *weiß*, wenn man selbst *weiß*, dass *alter* mit seinem Glauben richtigliegt.

- also auch:

$$\text{Theorem} \vdash W_a W_b p \supset W_b p \wedge W_a p$$

- und etwas generischer:

$$\text{l-Theorem} \vdash W_a \exists b W_b p \supset W_a p$$

vorausgesetzt werden muss nur, dass man $(\exists B)$ kennt.

Geheimnisse

- Ähnlich wie $W_a \neg W_b p \wedge W_a p$ gibt es auch Geheimnisse:

$$W_i(t \wedge \neg \exists b(b \forall i \wedge W_b t))$$

- Epistemische Subjekte ließen sich auch anhand ihrer Geheimnisse individuieren.

Experten

- Spiegelbildlich zu meinem privilegierten Wissen meiner Geheimnisse oder der Ignoranz anderer, kann ich auch wissen, dass ein anderer ein Experte bezüglich einer Frage ist (d.h. Wissen hat), wo ich keins habe:

$$W_i(\exists a)((W_{ap} \vee W_{a\neg p}) \wedge \neg W_{ip} \wedge \neg W_{i\neg p})$$

- Nicht wissen kann ich hingegen: $W_i(W_{ap} \wedge \neg W_{ip})$

Jemandes Folgerungen kennen

- Insofern wir die Prinzipien Epistemische Abtrennung und Konjunktivität kennen, können wir von den Annahmen Watsons und seinem Wissen über (materiale) Implikationen auch auf *seine* (d.h. die von ihm gezogenen Konsequenzen) schließen:

$$G_a G_b p \wedge G_a G_b (p \supset q) \supset G_a G_b q$$

- Schlüsse dieser Art dienen auch der Kritik anderer bezüglich ihrer Inkonsequenz: Wir sehen Konsequenzen, die sie (als rationale Subjekte) auch sehen sollten.

Positive Introspektion

- Positive Introspektion entspricht dem S4-Axiom

$$\Box p \supset \Box \Box p$$

- Gegeben die Vielfalt der epistemischen Operatoren bietet sich eine Vielzahl von Prinzipien an, nicht nur für jeweils einen Operator, sondern auch für die Mischung von Operatoren.
- Welche Prinzipien man annimmt hängt des Weiteren vom zugrunde gelegten Wissensbegriff ab.

[sogenannte ‚KK-Thesis‘]

$$(1) \quad W_{ap} \supset W_a W_{ap}$$

$$(2) \quad \ddot{U}_{ap} \supset \ddot{U}_a \ddot{U}_{ap}$$

$$(3) \quad G_{ap} \supset G_a G_{ap}$$

$$(4) \quad M_{ap} \supset M_a M_{ap}$$

$$(5) \quad G_{ap} \supset \ddot{U}_a G_{ap}$$

$$(6) \quad M_{ap} \supset \ddot{U}_a M_{ap}$$

$$(7) \quad \ddot{U}_{ap} \supset W_a \ddot{U}_{ap}$$

$$(8) \quad G_{ap} \supset W_a G_{ap}$$

$$(9) \quad M_{ap} \supset W_a M_{ap}$$

- Angenommen die ‚doxastic presumption‘, sollte als Axiomenschema gelten

$$\text{Axiom} \quad \text{für einen epistemischen Zustand } \varphi$$

$$\varphi_{ap} \supset \ddot{U}_a \varphi_{ap}$$

Zur Erinnerung: es geht ‚nur‘ um dispositionale Zugänglichkeit. W_{ap} drückt aus, dass a den *dispositionalen* Glauben, dass p , hat und p vorliegt.

- $\vdash W_{ap} \supset W_a W_{ap}$

- Ist dies nicht zu stark? Sagt nicht der schwache Wissensbegriff, dass man zufällig etwas wissen kann, d.h. ohne sich seines Wissens sicher zu sein?
- Angenommen, a hat nur zufällig recht. Dann hat a zufällig Wissen (auch ohne dass zu erkennen). Hat a nun auch den Glauben, p zu glauben, dann glaubt a – im schwachen Sinne – auch p zu wissen. (Das wiederholt die Idee, dass wir, wenn wir etwas glauben – d.h. für mehr als bloß möglich halten – nie glauben können, es nicht zu wissen.) Also, da a ja *zufällig* weiß, dass p , weiß a *auch zufällig*, dass a weiß, dass p . Dieses Meta-Wissen muss aber indessen ebenso wenig erkennen wie sein ursprüngliches Wissen. Jemand kann –

zumindest gegeben den schwachen Wissensbegriff – Wissen *haben*, ohne dass *ihm dies transparent ist*.

- Gegeben dispositionale epistemische Zustände und den schwachen Wissensbegriff kann man ‚Positive Introspektion‘ akzeptieren.
- Für einen starken Wissensbegriff, der eine Rechtfertigungsbedingung enthält, wird Positive Introspektion auch fragwürdig sein.
- Es sei also betont: da hier *nicht* eine Theorie der Bewusstheit und Reflexion (eine Philosophie des Geistes), sondern eine Theorie epistemischer Zustände als Dispositionen und

ihrer logischen Zusammenhänge (eine Epistemische Logik) entwickelt wird, kann man hier stärkere Annahmen der Introspektion machen.

- Hilfreich kann sein, statt von ‚Introspektion‘ von ‚Zugänglichkeit‘ zu sprechen, insofern ‚Introspektion‘ die Idee der Bewusstheit naheliegt (insofern der Begriff ja gerade der Philosophie des Geistes entlehnt wurde).

Quasi-Mooresche Sätze

- Wer den schwachen Wissensbegriff kennt, kann nicht einfach sagen:

(1) Ich glaube, dass p , aber ich weiß es nicht.

(1*) $G_i p \wedge \neg W_i p$

(1**) $G_i p \wedge G_i \neg W_i p$

- Da Wissen ein externalistischer Begriff ist, wird mit (1*) i.d.R. zu viel beansprucht. Woher weiß ich, nicht zu wissen?
- Mit (1**) droht ein Quasi-Moorescher Widerspruch.

• Angenommen: $G_i p \wedge \neg W_i p$

Angenommen: p

dann [Df „W“]: $W_i p \not\vdash$

• Angenommen: $G_i p \wedge G_i \neg W_i p$

also [Positive Introspektion]: $G_i G_i p$

also [$\wedge$ Dis]: $G_i (G_i p \wedge p)$

also [Kenntnis Df „W“]: $G_i W_i p$

also [$\wedge$ Dis]: $G_i (W_i p \wedge \neg W_i p) \not\vdash$

also [$\neg$ E]: $\neg (G_i p \wedge G_i \neg W_i p)$

d.h. $\vdash G_i p \supset \neg G_i \neg W_i p$

Aus $G_i p \supset \neg G_i \neg W_i p$ folgt natürlich *nicht*: $G_i p \supset G_i W_i p$
denn Glauben ist nicht maximal: $\neg(G_i p \vee G_i \neg p)$

- Mit Positiver Introspektion erübrigen sich allerdings iterierte Wissensbehauptungen, es gilt ja:

$$\vdash W_i p \supset W_i W_i p$$

Mit (1) Ich weiß, dass ich weiß, dass p .

sage ich also nicht mehr als mit

(2) Ich weiß, dass p .

Deshalb kommen Sätze des Typs von (1) selten vor.

Negative Introspektion

- Negative Introspektion entspricht dem S5-Axiom

$$\Diamond p \supset \Box \Diamond p$$

- Ausgedrückt mit dem Wissensoperator:

$$\neg W_a p \supset W_a \neg W_a p$$

- Analog zur Positiven Introspektion gibt es verschiedene Variationen davon, etwa

$$\neg G_a p \supset G_a \neg G_a p$$

- Negative Introspektion ist völlig inakzeptabel, sowohl in einer Theorie der kognitiven Fähigkeiten als auch erkenntnistheoretisch.

[Warum?]

- Kognitionstheoretisch:

Jede Sprache enthält unendlich viele Sätze. Fast alle von diesen hat man noch nie erwogen. Hat man den Glauben, einen Satz α nicht zu glauben, hat man α gerade erwogen. Dies gilt für beliebige Sätze α . Genau das sagt nun aber Negative Introspektion: man hat einen Meta-Glauben bezüglich beliebiger nicht-erwogener Sätze der Sprache, die man damit doch erwägt. Sie müssen alle irgendwie dennoch zugänglich sein und mittels entsprechender Zustände in das Räsonieren eingehen.

Das überfordert mutmaßlich die Ressourcen endlicher epistemischer Subjekte.

- Erkenntnistheoretisch:

Angenommen den schwachen Wissensbegriff, Positive Introspektion und Negative Introspektion ergibt sich mit geringem logischen Wissen eine Allwissenheit bezüglich beliebiger Sachverhalte!

Das ist eine *reductio* für Negative Introspektion, insofern die anderen Annahmen akzeptiert wurden.

[Warum ergibt sich das?]

• Angenommen: $\neg W_i p$

aber ich bin überzeugt oder glaube es: $\ddot{U}_i p \vee G_i p$

also: $G_i p$

also [Positive Introspektion]: $W_i G_i p$

also [Df. „W“]: $\neg p$

also [Negativer Introspektion]: $W_i \neg W_i p$

also [Wissensaxiom, Kontraposition, EA]: $W_i \neg (G_i p \wedge p)$

1-Postulat: $W_i (\neg (G_i p \wedge p) \supset (G_i p \supset \neg p))$

also [EA]: $W_i (G_i p \supset \neg p)$

also [EA]: $W_i \neg p$

also [$\supset E, \forall E$]: $\vdash \forall a \forall p (\ddot{U}_i p \vee G_i p \supset (\neg W_a p \supset W_a \neg p))$

- $\vdash \forall a \forall p (\ddot{U}_i p \vee G_i p \supset (\neg W_{ap} \supset W_{a\neg p}))$

ist zum einen epistemisch inakzeptabel, da es hieße, dass Wissen bezüglich dessen, was man für wahr hält, ‘maximal’ ist: $W_{ap} \vee W_{a\neg p}$, was jedoch offensichtlich nicht so ist.

- Zum anderen könnte man sich, indem man obiges Rasonieren bezüglich seines Glaubens durchläuft, *jede beliebige Frage beantworten*, wäre also allwissend – man weiß schon oder korrigiert sich einfach im Fall des Nichtwissens.

- Die erkenntnistheoretische *reductio* erstreckt sich nicht auf G-Varianten Negativer Introspektion, die indessen wegen des eher kognitionstheoretischen Einwandes ebenfalls abzulehnen sind.
- Negative Introspektion muss also abgelehnt werden.