„es fehlt die Institution des Endes“

Wittgensteinscher Finitismus als Wegbereiter eines mengentheoretischen Fiktionalismus

Dieser Essay befasst sich mit Wittgensteins Zurückweisung des aktual Unendlichen. Die damit verbundene Position wird hier ‚Wittgensteinscher Finitismus‘ genannt. Es handelt sich um eine Position, die ‚Wittgensteinisch‘ ist, aber schwer Wittgenstein gesichert zugeschrieben werden kann. Dies liegt daran, dass sie zum einen ein Standbein in einer Interpretation der Logikauffassung des *Tractatus* hat, wobei jede Interpretation des TLP in Hinblick auf die Frage, welche der dort vorgelegten Thesen von Wittgenstein selbst tatsächlich vertreten wird, immer kontrovers ist. Das liegt zum Zweiten daran, dass sich das andere Standbein aus einer Interpretation einiger Passagen aus den *Bemerkungen zu den Grundlagen der Mathematik* bzw. *The Big Typescript* ergibt, d.h. Kollektionen nicht von Wittgenstein autorisierter Nachlassfragmente. Die Position rechtfertigt sich m.E. dennoch als ‚Wittgensteinisch‘ in dem Sinne, dass sie sich in die Spätphilosophie der *Philosophische(n) Untersuchungen* einpasst. Es handelt sich um einen ‚Finitismus‘ nicht im Sinne der Behauptung, dass es eine bestimmte finite Anzahl von Entitäten gibt, wie es ein strikter Finitismus behauptet, sondern im Sinne der Behauptung, dass zu jeder Zeit keine aktuale/vollendete Unendlichkeit von Entitäten vorliegt. Die Existenz aktuale Unendlichkeit wird sowohl in Wittgensteins Früh- als auch der Spätphilosophie zurückgewiesen – und zwar auf eine typische Weise im Rahmen von Wittgensteins Sprachphilosophie.

Zunächst wird hier die Problematik der aktualen Unendlichkeit entwickelt (§1). Danach werden kurz die finitistischen Elemente des TLP erläutert (§2), an welche die finitistischen Elemente der BGM und des BT anknüpfen (§3). Allerdings scheint die erreichte Position aufgrund ihrer Verwandtschaft zu konstruktivistischen Auffassungen instabil (§4). Im Geiste dieses Wittgensteinschen Ansatzes bietet sich allerdings eine Radikalisierung an – ein Wittgensteinscher Fiktionalismus – welche die Vorteile der entwickelten formalen Mengenlehre (ZFC) kombiniert mit ontologischer Nichtfestlegung (§5).

§1 Das Unendliche als „un"-Begriff

Wir bilden oft Wörter – und insofern vermeintlich bestimmte Begriffe – durch morphologische Kombination (etwa „brauch-bar", „viel-seitig" etc.). Negationspartikel können auch auf diese Weise eingesetzt werden, insbesondere „un". Insoweit scheint es sich bei „unendlich" um eine morphologische Kombination mit Negationsbedeutung zu handeln: nicht endlich.

Hier weist die vormoderne Logik allerdings auf einen Unterschied zwischen ‚negativen' und – sic! – ‚unendlichen' Urteilen hin. Das negative Urteil verneint das Zusprechen einer Eigenschaft.

(1) Das Pult ist weiß.

(2) Das Pult ist nicht weiß.

als Abkürzung von

(2') Es ist nicht der Fall, dass das Pult weiß ist.

Hingegen wäre das unendliche Urteil:

(3) Das Pult ist nicht-weiß.

Der Unterschied liegt darin, dass (2) eine Eigenschaft abspricht, während (3) eine negative Eigenschaft zuspricht. Diese Eigenschaft ist äußerst vage und unbestimmt [sic!]. Es wird mit „nicht-weiß" keine konkrete Farbigkeit zugeschrieben. Es fragt sich, ob die Idee einer einheitlichen Eigenschaft hier überhaupt Sinn macht.

Entsprechend bei „unendlich". Dies ist nicht einfach die Negation der Endlichkeit, sondern das Zuschreiben einer entsprechenden negativen Eigenschaft – hier schon nominalisiert – Unendlichkeit. Gerade die Nominalisierung geht mit einer Supposition einer wohlbestimmten Sache bzw. Eigenschaft einher. Das ist aber zunächst nur eine Supposition. Ansonsten müssten wir mit allen solchen Begriffsbildungen entsprechende Annahmen verbinden, was wir indessen im Allgemeinen nicht tun. Man vergleiche etwa: „unwirklich"/"Unwirklichkeit", „Nichtsein" usw. Handelt es sich bei ‚unendlich' überhaupt um eine wohlbestimme Eigenschaft? Gibt es eine Entität ‚das Unendliche'? Dies ist nicht offensichtlich und zu klären.

Eine (weitere) Quelle des Begriffs der Unendlichkeit liegt im Spezifikum der menschlichen Kognition im Unterschied zu Tieren: Rekursion. Der menschliche Geist verfügt über den Begriff einer rekursiven Prozedur bzw. den der rekursiven Einbettung. Nur so sind eine

Sprache im engeren Sinne und mutmaßlich höherstufige Intentionalität und wechselseitiges Wissen möglich. Der Begriff einer Funktion, die sich selbst aufruft, führt unmittelbar zum Begriff einer beliebig tiefen, indefiniten, mutmaßlich unendlichen Iteration bzw. Verschachtelung. Volle Rekursion im Unterschied zur primitiven Rekursion (einer „for"-Schleife) führt zur unendlichen/indefiniten Suchtiefe (einer „while"-Schleife). Dasselbe immer wieder tun mit dem Resultat der vorherigen Operation (etwa beim Dazuaddieren) führt zur Idee des unendlichen Fortsetzens oder sogar zur Idee eines Limits dieses ganzen Prozesses, eines Jenseits des unendlichen Prozesses!

Dadurch, dass wir einen Begriff haben, haben wir noch keine passende Entität. Man denke nur an ‚Vampir' usw. Selbst Begriffe logischer Natur oder Begriffe *a priori* – zu denen ‚unendlich' gehören könnte – garantieren dies nicht. Man vergleiche etwa ‚notwendig Existierendes'!

Selbst wenn der Begriff der Unendlichkeit kohärent ist, mag er dennoch eine Funktion jenseits einer Objektkonstitution haben. Man vergleiche die Funktion der Begriffe ‚Nichtexistenz' oder ‚unerkennbar', die jeweils eine wichtige Funktion in der Ontologie bzw. der Erkenntnistheorie haben, aber keine Objekte konstituieren. Auch wenn es etwas nicht gibt, kann eine kohärente Konzeption davon ein Teil des Systems der Wissenschaft sein. So mag man bezweifeln, dass es Zahlen ‚wirklich' gibt (als Entitäten). Die Theorie – oder das Narrativ – wie der Bereich der Zahlen gedacht werden soll, kann dennoch eine wichtige Funktion bei der Fundierung messender Wissenschaften innehaben. In diesem Sinne kann eine Konzeption (etwa in der Mengenlehre) von verschiedenen Unendlichkeiten als Entitäten eine Fundierungsfunktion für die Mathematik und die messenden Wissenschaften haben.

Eine solche Konzeption, obwohl kohärent, kann zurückgewiesen werden, wenn man die vermeintlichen begrifflichen Leistungen des ‚Unendlichen' auch anders – und mutmaßlich ontologisch sparsamer – erbringen kann. Eine besondere Rolle als Alternative zum Begriff des Unendlichen spielt der Begriff des Indefiniten. Auch dieser Begriff wird auf eine ähnliche Weise wie der Begriff des Unendlichen gebildet – als Negation der definiten Begrenztheit. Das Indefinite verneint eine konkrete Endlichkeit (etwa das Angeben einer bestimmten Anzahl) oder verneint das Postulat, einen ganzen unendlichen Bereich überschauen zu können (das Postulat man hätte eine abgeschlossene ‚Domäne' vor sich). An deren Stelle tritt ein offenes ‚weiter so'. Einige Varianten des Finitismus verwenden eine Konzeption des Indefiniten.

Der Aufstieg in *Cantors Paradies* (der immer noch größeren unendlichen Kardinalitäten) ergibt sich, sobald einmal eine aktuale Unendlichkeit angenommen wird. Hier bedarf es daher einer Einstiegsreflexion. Dies betrifft zwei Aspekte: das ontologisch-axiomatische Vorgehen und das Verständnis der Allquantifikation. Der erste Aspekt ist ein vernachlässigtes Stück Metaphysik. Der zweite Aspekt spielt bei mehreren Finitismen eine Rolle. Auch die Frage nach unbeschränkter Allgemeinheit gehört hierher bzw. die nach ontologischen Alternativen hierzu. Dieser Aspekt wirft schwierige semantische Fragen zur Allquantifikation auf.

In der Standard-Mengenlehre ZFC hat das Unendlichkeitsaxiom die Form

(U) $\exists x(\varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \supset y \cup \{y\} \in x))$

bzw. als Mengenabstraktion

(u) $u = \{x | \, x = \varnothing \vee \exists y(y \in u \wedge x = y \cup \{y\})\}$

welche – harmlos – impredikativ ist. Die Existenz von $\varnothing$ wird zugleich mit der Existenz einer unendlichen Menge postuliert. (U) ist das einzige nicht relative Existenzaxiom in ZFC. Derart postuliert (U) eine aktuale Unendlichkeit.

Als Axiom soll (U) wahr sein. Zugleich ist (U) als Existenzbehauptung offensichtlich synthetisch – im Unterschied zu den konditionalen Existenzaxiomen in ZFC. (U) ist somit synthetisch a priori! Also hat (U) einen Charakter – am Fundament der Mathematik – dem gemäß dem Logischen Empirismus eigentlich nichts entsprechen sollte. Insbesondere wird der Logizismus (die erhellende Reduktion der Mathematik auf die Mengenlehre als mutmaßlich ‚reiner Logik‘) zu einem Problem.

Was soll es heißten, dass (U) als Axiom postuliert wird? (U) ist wahr in ZFC (in der Sprache von ZFC). Sprachrelative Wahrheitsprädikate – wie in der analytischen formalen Semantik – werden also von (U) sagen „wahr in ZFC“. Doch damit ist sehr wenig gesagt. „Es gibt Vampire“ wäre entsprechend wahr gemäß der Theorie ‚Dracula‘ von Brahm Stoker.

Wir haben gegenüber solchen relativen Wahrheitsbegriffen auch einen absoluten: wahr in allen guten Theorien (d.h. solchen, welche der Wirklichkeit entsprechen). Wie sieht es diesbezüglich mit (U) aus? Selbst wenn Konventionen nicht direkt falsch sein können (zumindest in der Sprache, die sie konstituieren), so können sie unangemessen sein – d.h. die Sprache, welche durch die konstituiert wird, mag eine Sprache sein, die wir nicht sprechen (wollen) sollten.

(*) Katzen sind ferngesteuerte Roboter.

kann Teil einer – devianten – Sprache sein. Die Redefinition von „Katze“ – und evtl. von „Roboter“ – macht sie jedoch nicht in einem interessanten Sinne wahr. Der ‚interessante‘ Sinn von ‚wahr‘ und ‚korrekt‘ bezüglich einer Definition ist, dass sie zu einer Sprache gehört, die wir sprechen sollten, weil sie die beste uns zur Verfügung stehende Sprache ist, um erfolgreich die Wirklichkeit zu beschreiben, erklären und evtl. in sie handelnd eingreifen zu können. Ist ZFC also Teil dieses – zu einer Zeit immer fallibel bestimmten – besten Systems? Dieses verweist auf Argumente zur Wahrheit der Mathematik und insbesondere zur Unverzichtbarkeit der Annahme aktualer Unendlichkeit.

Eine entscheidende Motivation zur Annahme des Unendlichkeitsaxioms ist das *Prinzip der Domäne* Cantors. Es besagt ungefähr:

(D) Die Domäne der Quantifikation muss als gegeben angenommen werden.

Dies heißt auch, wie Cantor sagt, „Jede potentielle Unendlichkeit setzt eine aktuale Unendlichkeit voraus“.

In semantischer Hinsicht scheint (D) kaum bezweifelbar. Ein quantorenlogischer Satz soll wahr oder falsch sein (zeitunabhängig), insbesondere Sätze der Mathematik. Für einen Allsatz heißt dies, dass alle Gegenstände, über die quantifiziert wird, eine Eigenschaft haben. Für einen Existenzsatz heißt dies, dass es mindestens einen solchen Gegenstand in der Sorte der betrachteten Gegenstände gibt. Für beides muss der Bereich der betrachteten Gegenstände vorliegen.

In der modernen Formalen Semantik wird entsprechend ein Modell für eine Menge von Sätzen (eine Theorie) u.a. definiert durch die Domäne der Gegenstände, über die quantifiziert wird. Bezüglich dieser werden Variablenbelegungen definiert, die dann eine Rolle spielen in den Wahrheitsbedingungen quantifizierter Sätze, die schließlich wahr sind relativ zu dieser Domäne ($\forall x$: für alle Belegungen, $\exists x$: für mindestens eine Belegung von ‚x‘).

Soll eine Zahlentheorie also Theoreme bezüglich der natürlichen Zahlen aufstellen, wobei diese quantifizierte Form haben – als Eigenschaften aller natürlichen Zahlen ($\forall$-Aussagen) oder als relative Existenzbehauptungen ($\forall\exists$-Aussagen) oder absolute Existenzbehauptungen ($\exists$-Aussagen) – bedarf es somit einer Domäne natürlicher Zahlen, einer aktual unendlichen Domäne. So betrachtet drückt (U) ‚nur‘ aus, dass über Zahlen in $\mathbb{N}$ geredet werden soll.

Wie in *Cantors Paradi*es zu sehen, hört die Domäne allerdings nicht mit $\mathbb{N}$ auf. Wir quantifizieren ebenfalls bezüglich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, also hier auch über größere Domänen. Vor allem: in ZFC sehen wir deutlich Quantoren bezüglich aller Mengen (etwa die Axiome wie (U))! Was ist hier die Domäne?

Prinzip (D) lässt sich auf mindestens zwei Weisen kritisieren:

(i) Man kann zurückweisen, dass beliebige Quantifikationen wahrheitsdefinit sind. In einem gegebenen Bereich sind All- und Existenzaussagen wahr oder falsch. Es kann hingegen auch Fälle geben, bei denen kein abgeschlossener Bereich vorliegt (etwa bei der Quantifikation über alle Ereignisse inklusive der zukünftigen). In diesen Fällen handelt es sich bei den quantifizierenden Sätzen um Prognosen, die man als ‚unwiderlegt' ansehen kann, aber nicht um wahrheitsdefinite Sätze (analog zu Sätzen über die Zukunft). Die Frage wäre also, ob es sinnvoll sein kann, einen (mathematischen) Bereich abstrakter Entitäten als ähnlich offen wie die Zukunft zu betrachten. Es handelt sich indessen um einen Bereich zeitloser Gegenstände.

(ii) Insofern man analytische Quantifikationen hat, ergeben sich die Wahrheitswerte nicht aus der Inspektion eines (unendlichen) Bereichs, sondern aus den Definitionen der entsprechenden Begriffe für Entitäten (wie Mengen oder Zahlen). Einige Axiome legen die Natur der Entitäten fest (etwa „Jede Zahl hat einen Nachfolger"). Insofern mathematische und logische Sätze analytisch sind, müssen sie sich so herleiten lassen. Empirisch-mathematische Sätze gibt es keine. Selbst wenn – aufgrund der Unvollständigkeitstheoreme – der Begriff der natürlichen Zahl in PA nicht komplett gefasst ist, handelt es sich bei den Lücken nicht um zusätzlich erworbenes kontingentes Wissen über Zahlen, bezüglich dessen man einen Individuenbereich inspizieren muss. Für die analytisch wahren mathematischen Sätze ist es sogar – zunächst – irrelevant, ob der Bereich endlich oder unendlich ist. Die Unendlichkeit tritt erst dann auf, wenn die Axiome sie fordern oder implizieren (im Rahmen i.d.R. einer konsistenten Logik).

Man kann sich allerdings die Kritik sparen, vertritt man einen mathematisch-logischen Fiktionalismus. Dann gibt es eine Fiktion – das Buch ZFC – in der ein unendlicher Bereich (als Quantifikationsdomäne) angenommen wird, aber daraus folgt wenig für die Wirklichkeit.

§2 Finitistische Ansätze im Tractatus

Im Tractatus finden sich Ansätze zu einer Kritik des mengentheoretischen Realismus und der Annahme aktualer Unendlichkeit. Ein ausgearbeiteter anti-realistischer Finitismus wird sich vor allem im Verständnis der Allquantifikation unterscheiden. Abgelehnt wird das *Prinzip der Domäne*. Eine solche Position findet sich noch nicht ausgearbeitet im Tractatus. Der Tractatus bereitet jedoch eine Entwicklung in dieser Richtung in den BGM vor.

In einem endlichen Bereich lässt sich der Allquantor in eine endliche Konjunktion auflösen. Im Prinzip könnte man alle Objekte durch Aufzählung benennen: Objekt_1, Objekt_2 … In diesem Sinne unstrittig sind beschränkte Quantoren: $(\forall x<n)F(x)$. Allquantoren im engeren Sinne sind nötig, wenn uns irgendwann die Namen ausgehen. (In diesem Sinne geht eine modelltheoretische Semantik über substitutionelle Quantifikation hinaus.) Der Tractatus geht von ausreichend vielen Namen aus.

Erweitert sich der Bereich ständig (etwa durch Progression der Zeit oder der Konstruktion), ändert sich ständig die referentielle Bedeutung (Extension) des Allquantors! Ein $\forall$-Satz könnte nun allerdings zu einer Zeit wahr und zu einer anderen Zeit falsch sein! Allquantifikationen verhalten sich dann so wie Sätze, die ihren temporalen Index/Ort nicht deutlich machen, aber in einem temporalen Zusammenhang interpretiert werden (z.B „Heute regnet es“). Sind Allsätze also in diesem (oder einem ähnlichen) Sinne indexikalisch bezüglich einer von Sprechsituation zu Sprechsituation wechselnden Domäne? Das wäre eine Möglichkeit einer radikalen Uminterpretation der Allquantifikation.

Einige Allquantifikationen werden jedoch von Veränderungen der Domäne nicht betroffen: analytische. Wie schon bei der Diskussion des Prinzips der Domäne bemerkt, ließen sich ZFC-Allquantifikationen auf diese Weise verteidigen. Das kann jedoch nicht auf alle Allsätze zutreffen, wenn sich die Domäne tatsächlich ändert. Etwa könnte ‘alle Objekte bisher’ kleiner sein als ein bestimmter Rang in der iterativen Hierarchie von ZFC.

Es bleibt also ein Problem mit der Semantik des Allquantors in einer nicht aktual unendlichen Domäne, die sich unter Umständen als potentiell unendlich erweiterbar darstellt. Wäre sie strikt finit, bräuchte es ja überhaupt nicht der Quantifikation, es reichten Wahrheitsfunktionen. Man könnte nun Allsätze auf zwei Weisen neu auffassen:

(i) als nicht wahrheitsdefinit, sondern mit einem Gewissheitsgrad versehen, so wie Prognosen; dieser Grad könnte steigen mit weiteren Bestätigungen.

(ii) als nicht mit einem Gewissheitsgrad versehen, sondern als Annahmen ‘bis auf Weiteres’, die höchstens falsifiziert werden können, aber jetzt als wahr unterstellt werden.

Dieses Vorgehen erinnert an das Vorgehen mit empirischen Verallgemeinerungen und Prognosen in einer sich verändernden Umwelt. Ein Verfahren also, das sich in den empirischen Wissenschaften bewährt hat. Die Schwierigkeit, dieses Denken auf die Mengenlehre/ Mathematik auszudehnen, scheint darin zu liegen, hier zu bestimmen, was als Bestätigung oder Widerlegung oder als angemessener Gewissheitsgrad gelten soll, Letzteres insbesondere, wenn die Gesamtdomäne nicht bekannt ist. Die Gewissheit ließe sich verstehen als diejenige bisher immer erfolgter Bestätigung bzw. Nichtwiderlegung (d.h. ohne einen Grad anzugeben). In diesem Sinne bietet sich eher die Option (ii) an. Was als Widerlegung bei Allsätzen zählt ist klar: eine Instanz ohne die betreffende Eigenschaft. Was als Bestätigung von Existenzsätzen zählt ist klar: Aufweisen einer Instanz. Dies ähnelt – deckt sich mit – der intuitionistischen bzw. konstruktivistischen Auffassung von “∀“ und „∃“ (vgl. auch BT S.634f., 728).

Eine Position dieser Art hat Wittgenstein – zumindest in seiner mittleren Periode – vertreten, z.T. auch schon im Tractatus angedeutet. Die Interpretation des TLP ist schwierig, da hier noch weniger als später klar zwischen zu widerlegender Position und eigener Position unterschieden wird. Der TLP vertritt z.T. eine operationalistische Auffassung der Mathematik (vgl. z.B. TLP 5.21ff.). „Das Allgemeine ist die Wiederholung einer Operation“ (BT S.735). Darin deutet sich der spätere Regelbegriff der PU an.

Die Semantik der Allquantifikation wird im Tractatus zum einen durch die Reduktion der Prädikatenlogik auf die Aussagenlogik erläutert (d.h. Allsätze sind u.U. unendlich lange Konjunktionen), zum anderen besteht die Erläuterung im Verweis auf die Regeln, mit denen man bei Allsätzen verfährt (z.B. TLP 5.1311, vgl. BGM I.§10). Später lehnt Wittgenstein ausdrücklich unendlich lange Konjunktionen ab; es bleiben so nur finite Konjunktionen. Auch die an einigen Stellen verwendete Rede vom logischen Raum als „unendlichen Ganzen“ (TLP 4.463) hat Wittgenstein später als ‘fehlerhaft’ zurückgenommen. Im Tractatus wird aktuale Unendlichkeit nicht ausdrücklich ausgeschlossen, wenn man eine Sprache mit unendlich vielen Namen hätte (vgl. TLP 5.535).

Abgelehnt wird im TLP Mengenbildung ohne Vorschrift (d.h. ohne eine die Menge definierende Formel). Insofern kann es überhaupt maximal abzählbar unendlich viele Mengen geben, nicht die iterative Hierarchie von ZFC und *Cantors Paradies*. Das Mengenuniversum des TLP ist maximal das Gödelsche ‘Konstruktive Universum’ *L* – auch dieses ist allerdings unendlich groß. Eine Auswahlfunktion macht laut TLP nur im endlichen Fall Sinn. Die Paradoxien der Mengenlehre sollen durch Ablehnung der Imprädikativität vermieden werden (vgl. TLP 3.333), zugunsten einer schrittweisen Mengenbildung also. Die ‘Russell-Menge’ z.B. ist imprädikativ, da sie über einen Bereich redet, zu dem sie selbst gehört. Ähnlichkeiten bestehen auch zum Ansatz von Russells ‘no class’-Phase (vgl. explizit TLP 6.031), in der alle Sätze über Klassen übersetzbar sein sollen, in solche, in denen nur propositionale Funktionen und logische Symbole vorkommen. Das Unendlichkeitsaxiom enthält eine Vorschrift für die unendliche Menge, allerdings eine, die diese Menge selbst erwähnt. Außerdem handelt es sich bei (U) um ein Existenzaxiom, in dem die Klassenausdrücke nicht eliminierbar sind. Die Formulierung (U) und ähnliche von ZFC müsste der Tractatus somit zurückweisen.

Der Tractatus betont so das potentiell Unendliche und die Rolle von Sätzen und deren Regeln im Unterschied zu einer realistischen Ontologie der Mengen. Er orientiert sich allerdings fast ausschließlich an den Problemen einer Russellschen Typentheorie (d.h. nicht an Zermelos oder Cantors Mengenlehre). Eine Reflexion auf das Verhältnis von aktualer Unendlichkeit und Regelbegriff tritt erst mit den BGM auf.

§3 Wittgensteinscher Finitismus

Wittgenstein entfernt sich nach dem TLP immer weiter von der Standardmathematik. Seine Rückkehr in die Philosophie Ende der 1920er war von Fragen der intuitionistischen und konstruktiven Philosophie der Mathematik veranlasst. Wittgensteins Finitismus im engeren Sinne beginnt um 1930 und findet sich vor allem in den BGM, sowie auch im BT. Der Sinn des Finitismus ist „einer Verwirrung zu entkommen“ (BGM II.§61). Das authorisierte Spätwerk PU (begonnen schon in den späten 30ern) befasst sich nicht mehr zentral mit Logik oder Mathematik. In den BGM spielt der Begriff der Regel und Fragen des Umgehens mit der mathematischen Sprache die entscheidende Rolle: „Bedenken wir, wir werden in der Mathematik von *grammatischen* Sätzen überzeugt; der Ausdruck, das Ergebnis, dieser Überzeugtheit ist also, daß wir *eine Regel annehmen*.“ (BGM III.§26)

Ein Satz über alle Zahlen ist keine Behauptung, sondern gezeigt wird ein Schema, dass sich auf beliebige Zahlen ausdehnen lassen soll. ‘Theoreme’ sind insofern im Allgemeinen keine Behauptungen. Besonders trügerisch sind “usw” bzw. “...”. Darin zeigt sich eine Möglichkeit des Symbolismus. „Von einer Technik zu sagen, sie sei unbegrenzt, heißt *nicht*, sie laufe ohne aufzuhören weiter – *wachse* ins ungemessene; sondern, es fehle ihr die Institution des Endes, sie sei nicht abgeschlossen.“ (BGM II.§45). „Der endlose Weg hat nämlich nicht ein ‚unendlich fernes‘ Ende, sondern kein Ende.“ (BT S.734).

Eine Regel behauptet nicht ihre unendliche Anwendbarkeit (Anwendung auf einer unendlichen Domäne), sondern *zeigt* sie als Möglichkeit. Der Ausdruck “unendlich” macht nur Sinn in Verbindung mit solchen Regeln (im kantischen Sinne hat er regulative keine konstitutive Verwendung). Es gibt nur solche (z.B. reelle) Zahlen, für die wir solche Regeln angeben (womit sofort ein Problem mit den transzendenten Zahlen auftritt, wir haben *de facto* das sogenannte ‘rekursive Kontinuum’). Was laut BGM die Cantorsche Diagonalisierung zeigt ist nicht ein Aufweis einer überabzählbaren Menge, sondern dass der Ausdruck “Reihe aller reellen Zahlen” keinen Sinn macht. Entsprechendes gilt für die Widerlegung der Behauptung einer größten Kardinalzahl (vgl. BT S. 744). Das Cantorsche Diagonalverfahren lässt sich als eine Regel verstehen, immer weitere reelle Zahlen zu konstruieren (vgl. BGM II.§29ff.). Demgegenüber präsentieren *Dedekindsche Schnitte* gerade keine Regel, sondern bloß ein „irreführendes Bild“ (BT S.752).

In diesen Betrachtungen zu Regeln unterscheidet sich Wittgenstein (insbesondere später in den PU) auch von den Intuitionisten, insofern die Praxis des gesamten Sprachspiels mit den Regeln umzugehen, dem Verständnis der einzelnen Regeln vorausgeht und dieses mitkonstituiert – während im Intuitionismus einzelne Regeln das Fundament für ein konstruktives Gebäude/System liefern. In diesem fundamentalistischen Sinne ist Wittgenstein kein Konstruktivist.

Wittgenstein beginnt nicht mit einer Ontologie oder einem intendierten Anwendungsbereich der reinen Mathematik, sondern betrachtet die sprachlichen Operationen, die Sprechweisen, welche die Mathematik konstituieren. Zu klären bleibt die Frage, ob diesen Sprechweisen etwas entspricht und wieso die Mathematik in den angewandten Wissenschaften nützlich ist. Der Begriff der Praxis weist hier auf einen Ansatz.

Die BGM bieten allerdings nur Bruchstücke und bleiben unzureichend. Insbesondere Wittgensteins Rede vom ‘Zeigen’ ist insofern unbefriedigend als an die Stelle einer problematischen Ontologie (des aktual Unendlichen) eine mehr als problematische Epistemologie des Unaussprechlichen tritt. Für das ‘Zeigen’ gilt dasselbe Dilemma wie für logische Schemata: Entweder kommt das Gezeigte der Behauptung eines Allsatzes gleich, der dann wahr sein müsste, oder es bleibt unklar, was genau wir hier erfassen. Während

Wittgensteins Kritik der realistischen Ontologie deutlich wird, muss die angezielte Alternative im Verständnis der reinen Mathematik und der Anwendung der Mathematik noch deutlicher werden.

§4 Schwächen konstruktivistischer Kritiken

Konstruktivistische und anti-realistische Kritiken der aktualen Unendlichkeit und des Unendlichkeitsaxioms (U) sehen sich mit einigen grundlegenden Schwierigkeiten konfrontiert:

(i) Das realistische Argument für (U) besagt: Zahlen, wenn es sie denn gibt, sind geistesunabhängige Gegenstände. Gibt es eine, muss es alle geben. Sie werden nicht von uns – Schritt für Schritt – hergestellt! Diese Behauptung ist aber nur ein Ausdrücken des Anti-Konstruktivimus, ein Appell an eine realistische Intuition.

(ii) Freges Argument besagt: Es gibt die Einermenge zu jedem Gegenstand. Es gibt also: x, {x}, {{x}} usw. Also gibt es die unendliche Menge! Gegenargument: Wieso muss es immer eine Einermenge geben? Man denke nur an die Einermenge der Gesamtheit aller Mengen, diese gibt es doch – z.B. in ZFC – *nicht*.

(iii) Ein beschwichtigendes Argument könnte so lauten: Wir nehmen ‚nur' $\mathbb{N}$ an, nicht einfach die Gesamtheit von *Cantors Paradies*. Gegenargument: Wegen *Cantors Theorem* erhalten wir mit dieser Annahme, (U), den Aufstieg in *Cantors Paradies* über das Potenzmengenaxiom. Und die Annahme einer Potenzmenge scheint eine natürliche Annahme, natürlicher als (U).

(iv) Das Ordinalzahlenargument besagt: Haben wir den Begriff der Ordinalzahl (als Menge ihrer Vorgänger) können wir nie irgendwo stehen bleiben, denn mit einer Menge a lässt sich immer die Menge ihrer Elemente vereinigt mit {a} bilden: die Menge der Ordinalzahlen kann nicht endlich sein. Gegenargument: Selbst wenn wir den Begriff der Ordinalzahl haben, droht hier sofort die Burali/Forte Antinomie der größten Ordinalzahl. Die Menge Ω der Ordinalzahlen kann es nicht geben, denn als Menge ließe sie sich überschreiten. Wo sind dann all die Ordinalzahlen? Cantor muss hier von „inkonsistenten Totalitäten" sprechen und sieht außerhalb der Theorie das „absolute Unendliche", das sich gerade nicht begreifen lässt! Die Idee des Nichtstehenbleibenkönnens scheint also in sich widersprüchlich oder instabil.

(v) Das mathematische Argument besagt: Wie benötigen das aktual Unendliche für die Standard-Mathematik. Diese knüpft an die Praxis der Mathematiker und der mathematisierten Wissenschaft an. Diese sind als Teil der Wissenschaft und als Basis von Technik erfolgreich. Gegenargument: Dass es eine bestehende Praxis gibt, schließt nicht aus, dass sie – auch in ihrem Selbstverständnis – reformbedürftig ist. Zum zweiten Teil: Es stellt sich die Frage nach der Unersetzbarkeit der Gegenwartsmathematik für die Wissenschaften – und insbesondere, ob die Annahmen bezüglich unendlicher Mengen für eine mutmaßliche Unersetzlichkeit verantwortlich sind.

(vi) Das begriffliche Argument besagt: Bestimmte Begriffe lassen sich kategorisch nur durch Formeln der Prädikatenlogik Zweiter Stufe charakterisieren – interessanterweise auch der Begriff der Endlichkeit. Die Prädikatenlogik Zweiter Stufe nun ist nur eine verkleidete Mengenlehre aufgrund ihrer Prädikatquantoren. Gegenargument: Das stimmt im Rahmen der Modelltheorie und ihres Verständnisses der Charakterisierung von Begriffen durch Formeln und Modelle. Ob dies indessen die beste Explikation von Begriffen ist, ist fraglich. Begriffe können wir haben und verstehen ohne Modelltheorie.

Die Idee des Zählens verknüpft sich zwar mit der des Nichtabbrechens. Dies ist jedoch der Begriff der potentiellen Unendlichkeit (als Ideal dieses Nichtabbrechens). Von dort gibt es keinen einfachen Übergang zum aktual Unendlichen – dies wäre das Ideal des Abschlusses des unendlichen Prozesses, ein ganz anderer Begriff bzw. der konstitutive Gebrauch der regulativen Idee des Nichtabbrechens. Der Begriff des nicht-endlichen Prozesses, den wir per Negation bilden können (entsprechend ‚das Nicht-Endliche', ‚das Unendliche') verweisen von sich aus nicht auf das aktual Unendliche. D.h. hier kann man nicht einfach an unseren apriorischen Bestand von Begriffen appellieren. Dies gilt noch mehr für den Begriff des Nichtabzählbaren, da Nichtabzählbarkeit – *per definitionem* – jenseits der Prozesse des Zählbaren liegt, also insofern keine praktische Grundlage haben kann.

Das Bild der Konstruktion und der wachsenden Domäne(n) ist dennoch unserem Grundverständnis von Mengen – und damit von Zahlen – fremd. Solange Zahlen und Mengen nicht als Konkreta verstanden werden, ist es plausibler, eine aktuale Unendlichkeit von ihnen anzunehmen als eine potentielle Unendlichkeit, in der immer neue Mengen und Zahlen entstehen müssten. Woher und wie sollten abstrakte Gegenstände *entstehen* können – insbesondere reine Mengen? ZFC präsentiert ein kohärenteres Bild, in dem alle nötigen logisch-mathematischen Begriffe expliziert werden können. ZFC errichtet einen Standard der formalen Präzision. Ontologisch und epistemologisch dreht sich die Kontroverse um das

Prinzip der Domäne, also letztlich um die Semantik von Allaussagen. Einfacher scheint es, die Standardsemantik von Allaussagen *beizubehalten*.

Die konstruktivistische Position verweist auf eine potentiell unendliche Tätigkeit des Umgehens mit Zeichen, nicht mit Objekten. Insofern weist diese Position schon in die Richtung auf nihilistische Positionen bezüglich von Mengen und Zahlen.

§5 Wittgensteinscher Fiktionalismus

Während man sicher Wittgenstein als mathematischen Anti-Realisten ansehen kann, soll im Folgenden eine Position skizziert werden, die an den Geist des Wittgensteinschen Finitismus anknüpft, die man jedoch kaum in ihrer Allgemeinheit Wittgenstein zuschreiben kann. An die Stelle eines bloßen Finitismus tritt ein Fiktionalismus. „Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker.“ (BGM I.§168) „Weil die Mathematik ein Kalkül ist und daher wesentlich von nichts handelt, ...“ (BT S.532).

Jede Form des Anti-Realismus in der Mengenlehre und Mathematik muss drei Dinge erklären können:

(i) die Bedeutung der mathematischen Sprache

(ii) den *a priori* Charakter der Mathematik

(iii) die Anwendbarkeit der Mathematik auf die Wirklichkeit und ihre Rolle in den empirischen Wissenschaften

Mutmaßlich ist (i) die größere Schwierigkeit für den Anti-Realisten, während der (platonische) Realist der Herausforderung (iii) gegenübersteht.

Für den Anti-Realisten ist die Mathematik objektiv, indem sie allein wahr ist aufgrund von Konventionen. Mathematische Wahrheiten sind ableitbar und nichts anderes als ableitbar. Mathematische Wahrheit ist identisch mit Ableitbarkeit. Wahrheit in der reinen Mathematik ist ‘wahr in der Erzählung der reinen Mathematik‘, übereinstimmend mit der Ableitbarkeit aus den Axiomen der reinen Mathematik mittels der Regeln der reinen Mathematik und der Logik. Daher ist die reine Mathematik *a priori* und analytisch, was Frage (ii) beantwortet. Schwierige Beweise erweitern unser Wissen und Vertiefen unser Verständnis bezüglich der Reichweite der niedergelegten Konventionen. Insofern können auch analytische Sätze überraschen und zu einer Wissenserweiterung beitragen. [Diese Auffassung mathematischer Wahrheit steht nicht in Konflikt zu *Gödels Unvollständigkeitstheoremen,* da die Begründung der Wahrheit der betreffenden ‚Gödelsätze' – wie auch Wittgenstein feststellt (BGM I, Anhang III, §7f.) – in einem anderen formalen System stattfindet als dem, um dessen Unvollständigkeit es gerade geht. Konstruktivisten weisen darüber hinaus darauf hin, dass so allein die Nichtübereinstimmung zwischen unseren intuitiven Begründungsressourcen und denen eines bestimmten formalen Systems gezeigt werde, wobei letzteres sich immer neu erweitern lässt.]

Die Sprache der Mathematik hat Bedeutung aufgrund der Konventionen der reinen Mathematik (d.h. Regeln des Gebrauchs und rekursiven Wahrheitsbedingungen). Dies beantwortet (i) zur Hälfte; es erläutert den *Sinn* von Theoremen.

Die Ontologie der Mengenlehre – und damit der reinen Mathematik – unterstützt diese Objektivität, indem sie ein Bild bereitstellt von unabhängig existierenden Entitäten, welche die Wahrheit der mathematischen Sätze verbürgen. Diese Ontologie *ist eine Fiktion, welche die Konventionen der Mengenlehre begleitet.* Um (i) vollständig zu beantworten bezüglich der Referenz der Ausdrücke der Mengenlehre und reinen Mathematik, kann man also sagen: Uns wird ein Bild/eine Geschichte präsentiert eines Bereichs von Entitäten, die als Ersatzreferenten für Ausdrücke der Mengenlehre und reinen Mathematik dienen, genauso wie fiktionale Entitäten als Referenten für ihre Namen dienen – was im Klartext sagt: genaugenommen referieren mengentheoretische und mathematische Ausdrücke gar nicht, sie sind bloße Repräsentationen. Die Mengenlehre erzählt eine Geschichte, aber keine Geschichte *über* etwas, nicht *über* platonische Formen und nicht *über* nicht-existierende Gegenstände.

Die Mengenlehre und die reine Mathematik unterscheiden sich allerdings von anderen Geschichten durch ihre Anwendbarkeit in den Wissenschaften und im Alltag. Dies kann man auf folgende Weise – Frage (iii) beantwortend – so erläutern:

(i) Die reine Mengenlehre und reine Mathematik bestehen in einem sprachlichen Rahmenwerk, das sowohl Ausdrücke für einzelne Entitäten als auch solche für Eigenschaften und Relationen umfasst.

(ii) Teile der Wirklichkeit (z.B. zählbare Gegenstände und messbare Eigenschaften) liefern ein partielles Modell dieses Rahmenwerks. Ein Modell natürlich nicht selbst im mengentheoretischen Sinn, sondern in dem Sinne, dass Teile der Wirklichkeit auf die mathematischen Ausdrücke bezogen werden können (z.B. bei messbaren Eigenschaften) und die diesbezüglich ableitbaren Konsequenzen im sprachlichen Rahmenwerk sich wieder angemessen auf Teile der Wirklichkeit beziehen lassen.

(iii) Ein solcher Homomorphismus (im Sinne, dass die Konsequenzen des Bildes das Bild der Konsequenzen liefern) lädt uns ein zur Annahme, dass die Teile der mathematischen Sprache, die wir (noch) nicht auf Teile der Wirklichkeit bezogen haben, verstanden werden können als ebenfalls ein Modell in der Wirklichkeit habend. Ihre Gegenstücke in der Wirklichkeit können wir entweder als bisher Unentdecktes oder wie theoretische Entitäten in den Wissenschaften ansehen – oder wir kümmern uns gar nicht um sie, solange der Homomorphismus auf den beobachteten Gegenstücken in der Wirklichkeit stabil besteht. Man kann diese Teile der reinen Mathematik auch als *nützliche unterstützende Fiktionen* ansehen. Sie sind nur ‚unterstützend', insofern ihnen nichts im partiellen Modell des sprachlichen Rahmenwerks der Mathematik entspricht.

Auf diese Weise verankert der Fiktionalist die reine Mathematik in einem partiellen Modell ihrer selbst in der Wirklichkeit. In dieser Ansicht trifft also die realistische Idee, dass die Mathematik der Wirklichkeit korrespondiert, zum Teil zu. In dieser Ansicht kann die nicht direkt angewandte, reine Mathematik und abstrakte Mengenlehre toleriert werden aufgrund ihrer Leistung für die Gesamtmathematik und Wissenschaften. Sie sollte nur nicht verstanden werden als Erforschen eines unabhängig bestehenden Bereiches der mathematischen Entitäten.

Die Sprache der Mengenlehre und reinen Mathematik erfüllen so eine andere Funktion als die Sprachen der empirischen Wissenschaften. Wissenschaftliche Behauptungen sind als wahr oder falsch erweisbar – inklusive derer, die mathematische Elemente enthalten – insofern es Prozeduren gibt, Wahrheit oder Falschheit zu begründen (auch für die mathematischen Elemente, etwa durch Paradigmen des Zählens oder Messens). Die wissenschaftliche Sprache zielt in der Beschreibung der Wirklichkeit auf Tatsachen. Die reine Mathematik indessen kann angesehen werden als ‘wahr oder falsch in der Erzählung der Mathematik' (aufgrund von Ableitbarkeit) – oder als die Hintergrunderzählung für die angewandte Mathematik entwickelnd. All dies ist objektiv aufgrund der intersubjektiv diesbezüglich geteilten Konventionen. Die Sprache der reinen Mathematik zielt nicht auf die Beschreibung oder Bezugnahme auf mathematische Tatsachen.

Ein allgemeiner fiktionalistischer Ansatz behauptet, dass selbst solche rein mathematischen Behauptungen, die über endliche Kardinalzahlen sprechen, sich nicht auf mathematische Tatsachen beziehen, nicht bloß solche rein mathematischen Behauptungen, die über entfernte Regionen von *Cantors Paradies* sprechen. Wissenschaftliche oder lebensweltliche Aussagen, die Numerale enthalten (z.B. “Da liegen 3 Äpfel auf diesen 2 Tischen“), besitzen Wahrheitsbedingungen oder sind verbunden mit Prozeduren der Rechtfertigung, die keine Zahlen involvieren, selbst keine finiten Zahlen. Prozeduren und Regeln des Zählens, Messens, des Verwendens von Lineal und Zirkel dienen als Brückenprinzipien, die empirische Behauptungen und Beobachtungen auf die reine Mathematik beziehen.

Damit unterscheidet sind ein Fiktionalismus sowohl von einem realistischen (strikten) wie einem konstruktivistischen Finitismus, die beide zumindest die bisher entdeckten oder konstruierten Teile der Mathematik als existierend annehmen. Der Fiktionalist teilt sowohl die realistische Kritik am Konstruktivismus als auch das realistische Bild des Mengenuniversums – aber eben nur *als Bild*. Konstruktivisten und Finitisten müssen auch die Standardlogik (der Quantifikation oder der Negation) ändern. Ein Fiktionalist muss die Quantifikation nicht neu verstehen. Auch in Erzählungen werden die üblichen Quantifikationsregeln verwendt (sei es, ob man Feen zählt oder Funktionen). Der Fiktionalist ist kein Revisionist bezüglich ZFC oder bezüglich der Standardmathematik. Sein Anti-Realismus bezieht sich nicht auf Theoreme und die zugrundeliegende Logik, sondern auf die Ontologie. Etwas als Mengenlehre oder reine Mathematik zu identifizieren, dient als starre syntaktische Indikation eines Skopus, der die behauptende Kraft der involvierten Aussagen einklammert. Die Beschriftung „Ein Roman“ auf der Titelseite oder dem Umschlag eines Buches informiert uns, dass wir es mit einer Fiktion zu tun haben. Wir klammern die Wahrheitsansprüche der dort gemachten Aussagen ein als relativ zu dieser Erzählung. – Dasselbe gilt für die Beschriftung „Eine mengentheoretische Abhandlung“.

In dem Maße, wie die Wirklichkeit nur ein partielles Modell der mathematischen Sprache liefert, kann es verschiedene mathematische Rahmenwerke geben, die äquivalent sind bezüglich der Beschreibungen und Projektionen des partiellen Modells. Dies gilt umso mehr für mengentheoretische Rahmenwerke, die nicht direkt auf die Wirklichkeit beziehbar sind. Zwischen ihnen lässt sich dann nur wählen anhand von Abwägungen der Kohärenz der Gesamtauffassungen in ihren Postulaten oder den Eigenschaften des präsentierten Bildes. Dies betrifft beispielsweise Existenzannahmen bezüglich unerreichbarer überabzählbarer Kardinalzahlen oder bezüglich der Unterscheidung zwischen echten Klassen und Mengen (etwa ein Abwägen zwischen ZFC und NBG). Im Bereich der Mengenlehre und reinen Mathematik sollte man daher jenen Carnapschen Konventionalismus in Teilen einräumen, den man für die Logik zurückweisen sollte.

Es ergibt sich auch ein anderer Blick auf die mengentheoretischen Antinomien – für den Fall, dass man sich nicht auf ZFC festlegen möchte. Eine Erzählung kann ungelöste Rätsel und sogar Konfusionen enthalten, solange sie nicht den Hauptstrang der Erzählung betreffen. Das inkonsistente Objekt der Erzählung (sei es ein überschnelles UFO oder eine übergroße Menge) gibt es nicht wirklich. Dieses Desinteresse an Nebensträngen einer sonst interessanten Erzählung entspricht sowohl unserem Umgang mit Romanen als auch dem Umgang des anwendungsorientierten Mathematikers mit Fragen der mengentheoretischen Grundlegung.

Wir unterscheiden zwischen unmittelbar anwendbaren mathematischen Redeweisen und Teilen des errichteten Rahmenwerkes und seiner Konsequenzen. Realismus bezüglich der Logik gründet sich in der Vermutung, dass alle Menschen über ein logisches Vermögen mit bestimmten Prinzipien und Parametern verfügen. Anti-Realismus und Fiktionalismus bezüglich der reinen Mathematik gründet in der Vermutung, dass dieses logische Vermögen keine Liste mengentheoretischer Postulate nach Art von ZFC *a priori* enthält. Es gibt Tatsachen zu entdecken über unsere logischen Vermögen und die eingeschlossenen Schlussprinzipien. Bezüglich reiner Mengen gibt es keine Tatsachen zu entdecken.

Manuel Bremer, 2019.