Das Unendlichkeitsaxiom und das Prinzip der Domäne

Der Aufstieg in *Cantors Paradies* ergibt sich, sobald *einmal eine* aktuale Unendlichkeit angenommen wird. Hier bedarf es daher einer Einstiegsreflexion. Dies betrifft zwei Aspekte: das ontologisch-axiomatische Vorgehen und das Verständnis der Allquantifikation.

Der zweite Aspekt spielt bei mehreren Finitismen eine Rolle. Auch die Frage nach unbeschränkter Allgemeinheit gehört hierher bzw. die nach ontologischen Alternativen hierzu. Dieser Aspekt wirft schwierige semantische Fragen auf.

Der erste Aspekt ist ein vernachlässigtes Stück Metaphysik des ansonsten doch so ‚logischen' ‚Logischen Empirismus'. Hier ist eine Vertiefung zur Wahrheitsproblematik und zur Problematik von Konventionen nötig.

§1 Das Unendlichkeitsaxiom

In Z hat das Unendlichkeitsaxiom die Form

(U) $\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \supset y \cup \{y\} \in x))$

bzw. als Mengenabstraktion

(u) $u = \{x \mid x = \emptyset \vee \exists y(y \in u \wedge x = y \cup \{y\})\}$

Welche – harmlos – impredikativ ist.[1]

Die Existenz von ∅ wird zugleich mit der Existenz einer unendlichen Menge postuliert. (U) ist das einzige nicht relative Existenzaxiom in ZFC.

[1] Das Axiom ist impredikativ, insofern die Menge, um die es geht, durch Bezug auf eine Allgemeinheit definiert wird, zu der es selbst gehört. ZFC ist in dieser Hinsicht wesentlich impredikativ. Diese Impredikativität widerspricht einem konstruktivistischen Bild, in dem die Konstrukte nach einander auftreten und ein neues jeweils eine von ihm getrennte Stufe der Konstruktion voraussetzt. Es ist in ZFC nicht – wie in der Typentheorie – verboten, dass eine Menge über sich selbst redet. Gemäß dem realistischen Bild der iterativen Hierarchie finden sich in impredikativen Mengendefinitionen einfach entsprechende strukturelle Beziehungen wieder. Impredikativität alle bedingt keine Antinomien. Die üblichen Antinomien werden in ZFC nicht durch Predikativität, sondern durch die Beschränktheit des Aussonderungsaxioms und den Charakter des Universums – was einer ‚Limitation of Size' entspricht – verhindert. Ohne Impredikativität ließe sich Unendlichkeit durch entsprechende Axiome wie in PA garantieren: 0 ist kein Nachfolger; jede Zahl hat einen Nachfolger; die Nachfolgerelation ist eine Funktion. Eine unendliche Menge mag dann 0 und die Nachfolger von 0 enthalten. So lässt sich – natürlich – nicht die Arithmetik auf die Mengenlehre reduzieren.

(U) bedingt *mindestens eine* Menge, welche die von Neumann Ordinalzahlen enthält

$0 = \emptyset$

$1 = \{\emptyset\}$

$2 = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

usw.

d.h. jede Ordinalzahl ist die Menge ihrer Vorgänger. (U) schließt nicht aus, dass es noch andere Elemente in einer betreffenden Menge gibt.

$$\mathbb{N} = \bigcap \{x | \emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \supset y \cup \{y\} \in x)\}$$

Derart postuliert (U) eine *aktuale Unendlichkeit*.

§2 Axiomatische Ontologie?

Als Axiom soll (U) wahr sein. Zugleich ist (U) als Existenzbehauptung offensichtlich synthetisch – im Unterschied zu den konditionalen Existenzaxiomen in ZFC. (U) ist somit *synthetisch a priori*! Also hat (U) einen Charakter – am Fundament der Mathematik – dem gemäß dem Logischen Empirismus eigentlich nichts entsprechen sollte. Insbesondere wird der Logizismus (die erhellende Reduktion der Mathematik auf die Mengenlehre als mutmaßlich ‚reiner Logik') zu einem Problem.

Was soll es heißten, dass (U) als Axiom postuliert wird? (U) ist wahr in Z (in der Sprache von Z). Sprachrelative Wahrheitsprädikate – wie in der analytischen formalen Semantik – werden also von (U) sagen „wahr in Z". Doch damit ist sehr wenig gesagt. „Es gibt Vampire" wäre entsprechend wahr gemäß der Theorie ‚Dracula' von Brahm Stoker.

Wir haben gegenüber solchen relativen Wahrheitsbegriffen auch einen absoluten: wahr in allen guten Theorien (d.h. solchen, welche der Wirklichkeit entsprechen).

Wie sieht es diesbezüglich mit (U) aus? – Dies ist eine Variante des Problems, das Quine unter dem Titel ‚truth by convention' verhandelt.

Konventionen konstituieren eine Sprache (noch ganz im Sinne Carnaps) und sie konstituieren zugleich (im Sinne Carnaps) die analytischen Wahrheiten *dieser* Sprache.

Doch sind die analytischen Wahrheiten einer Sprache auch (absolut) wahr?

Es gibt Grenzen des Konventionalismus. Selbst wenn Konventionen nicht direkt falsch sein können (zumindest in der Sprache, die sie konstituieren), so können sie *unangemessen* sein – d.h. die Sprache, welche durch die konstituiert wird, mag eine Sprache sein, die wir *nicht sprechen (wollen) sollten*.

(*) Katzen sind ferngesteuerte Roboter.

kann Teil einer – devianten – Sprache sein. Die Redefinition von „Katze" – und evtl. von „Roboter" – macht sie jedoch nicht in einem interessanten Sinne *wahr*. Der ‚interessante' Sinn von ‚wahr' und ‚korrekt' bezüglich einer Definition ist, dass sie zu einer Sprache gehört, die wir sprechen *sollten, weil* sie die beste uns zur Verfügung stehende Sprache ist, um erfolgreich die Wirklichkeit zu beschreiben, erklären und evtl. in sie handelnd eingreifen zu können.

Ist Z also Teil dieses – zu einer Zeit immer fallibel bestimmten – besten Systems? Dieses verweist auf Argumente zur Wahrheit der Mathematik und insbesondere zur Unverzichtbarkeit der Annahme aktualer Unendlichkeit.

§3 Zum Wahrheitsbegriff und zum Begriff der besten Theorie

Es besteht eine Verbindung zwischen dem Bezugnehmen und unseren kognitiven Vermögen, etwa unserem Vermögen, Ausdrücke der Sprache angemessen zu verwenden. Die Bewährung von Wahrheitsansprüchen verweist auf Begründungsverfahren. In den Formen unserer intersubjektiven Bezugnahme (also insbesondere den Regeln einzelner Sprachen und den Gesetzesaussagen einzelner Theorien) fassen wir etwas als objektiv. Deshalb muss der Realismus internalistisch sein: unser Bezugnehmen ist ein Bezugnehmen aus spezifischen Repräsentationsformaten heraus. Deshalb besitzt Wahrheit einen Begründungsaspekt.

Unsere Weisen zu sprechen oder zu bestätigen ‚machen' aber nicht verschiedene Wirklichkeiten. Epistemisch erfolgsorientierte Konventionen dürfen nicht völlig wider die Daten laufen, die ohne Anfrage in unser kognitives System eingehen. Die Wirklichkeit ist einfach, wie sie ist. Wenn sie in einer Sprache oder gemäß einer Methode nur begrenzt zugänglich ist, verliert sie dadurch nicht ihre Wohlbeschaffenheit. Vielmehr sind wir eher bestrebt, unsere Sprachen und Methoden anders ‚zu machen', so dass sie mehr von der Wirklichkeit erfassen können. Wenn es verschiedene brauchbare Klassifikationssysteme gibt, dann entspricht eben allen etwas in der Wirklichkeit.

Unseren Aussagen kommt für uns die Rolle zu, dass sich im Falle, dass eine Aussage bewährt ist, eine Bezugnahme auf die Wirklichkeit ergibt. Intern verfügen wir immer nur über einen

Begründungs- oder Bewährungsstand, der auch wieder überholt werden mag. Wir beanspruchen, dass sich die von uns für wahr befundenen Aussagen auf ihre Wahrmacher in der Wirklichkeit beziehen, doch können wir das aufgrund der epistemischen Kluft nicht garantieren. Alles was unseren Begründungen abgeht ist die epistemische Garantie, dass es sich so verhält.

Derart ist der Wahrheitsbegriff gedoppelt:

(WR) Eine Aussage ist wahr genau dann, wenn die intersubjektiv bestbegründete Einfügbarkeit dieser Aussage in unseren bestbegründesten Bezugrahmen auf die Wirklichkeit gegeben ist und die Übereinstimmung dieses Bezugsrahmens mit der Wirklichkeit besteht.

Diese Eigenschaft kann nur Aussagen aus Sprachen zukommen, in denen unser bestbegründeter Bezugsrahmen auf die Wirklichkeit formulierbar ist. „unser bestbegründeter Bezugsrahmen" meint dabei den bestbegründeten Bezugsrahmen, der sich in unseren Repräsentationsformaten (z.B. einer bestimmten Sprache) formulieren lässt – nicht den besten Bezugsrahmen, den wir heute oder morgen haben. Wahrheiten sind nicht zeitlich relativ. Wir mögen unsere Bezugsweisen, die wir heute anwenden, verbessern, doch der bestbegründete Bezugsrahmen steht als Orientierungspunkt dieser geschichtlichen Bemühungen schon fest.

Bestimmen wir die Eigenschaft einer Aussage, wahr zu sein, als ihre *Einfügbarkeit* in den besten Bezugsrahmen auf die Wirklichkeit, so können wir den Gedanken der Wahrheitsdefinitheit beibehalten: Aussagen *sind* wahr, ob wir dies wissen oder nicht, denn sie sind einfüg*bar* in den besten Bezugsrahmen auf die Wirklichkeit, ob wir dies wissen oder nicht. Die Einfügbarkeit einer Aussage beruht auf den inferentiellen Beziehungen ihres Gehaltes und der Beschaffenheit der Wirklichkeit.

Als Realisten halten wir zugleich einen noch stärkeren Wahrheitsbegriff *für sinnvoll*.

(WR+) Die Aussage „F(a)" ist wahr in L_i genau dann, wenn der Raum-Zeit-Bereich a wirklich die Struktur F besitzt.

Dieser externe Wahrheitsbegriff kann allerdings auch dem internen Realisten dazu dienen, die skeptische Möglichkeit zu formulieren. Dem tatsächlichen Sprechen entspricht mehr der interne als der externe Wahrheitsbegriff.

Insofern sich (WR) auch auf einen Korrespondenzaspekt bezieht, stellt sich die Frage, wie der Anspruch auf Wahrheit begründet werden kann. Hier kann man im Rahmen des intern realistischen Bildes von Erkenntnis – also in einem virtuosen (statt einem vitiösen) Zirkel, der die Kohärenz dieses Bildes zugrunde legt – wieder eine evolutionär funktionalistische Erklärung gegeben werden: Der interne Wahrheitsbegriff ist *explanativ*: die Orientierung an den bestbegründeten Meinungen anstatt an beliebigen Meinungen *erklärt* die größere Erfolgsträchtigkeit von Eingriffen in die Wirklichkeit. Dass der Einfügbarkeit von „F(a)“ in den bestbegründeten Bezugrahmen auf die Wirklichkeit die Tatsache *F(a)* korrespondiert, ist so die beste Erklärung für den Erfolg unseres erfolgreichen Agierens in dieser Wirklichkeit. Die evolutionäre Argumentation rechtfertigt damit Korrespondenzbehauptungen durch deren (vorläufige) Identifikation mit dem Feststellen praxiserprobter dauerhafter Behauptbarkeit durch Begründung.

Bezüglich von ZFC ist also die Frage, ob alle Axiome als Aussagen in unsere bestmögliche Theorie eingehen müssen.

§4 Wahrheit und Korrigierbarkeit von Axiomen, Definitionen, Konventionen

Analytische Wahrheiten sind wahr aufgrund von Bedeutung, wahr aufgrund von Bedeutungskonventionen. Das Aufstellen der Bedeutungstheorie für *L* ist zwar eine empirische Angelegenheit (nämlich eine Interpretation), liegt jedoch die Bedeutungstheorie für irgendeinen Sprachstand in *L* vor, dann ergeben sich aus rein logisch-semantischen Gründen analytische Aussagen. Gemäß der Bedeutungstheorie kann es dann für einige Aussagen von *L* kein falsifizierendes Modell mehr geben.

(A) Eine Aussage „p“ ist analytisch, wenn gilt: „p“ ist eine Aussage der Stufe n und der Wahrheitswert von „p“ hängt nicht von anderen Aussagen der Stufe n ab, und „p“ wiederholt in direkter Rede etwas, das zu unserem Bedeutungswissen gehört.

Die Bedeutungstheorie einer Sprache d.h. die betreffenden (T)-Äquivalenzen einer formalen Wahrheitstheorie dieser Sprache *konstituieren* einen *Begriffsrahmen*. Es handelt sich bezogen auf diese Leistung bei ihnen nicht um „Urteile“, da sie nicht empirisch wahr oder falsch sind, sondern um *Postulate*, Definitionen, die das Bedeutungssystem konstituieren.

Entsprechend muss auch der Begriff des *Synthetischen Apriori* auf eine Sprache relativiert werden. „Analytisch“ und „synthetisch“ als Untersuchungsgegenstand gehören in die Metatheorie einzelsprachlicher Bedeutungstheorien, nämlich die Formale Semantik, und werden von den einzelsprachlichen Bedeutungstheorien verwendet, um Aussagen der spezifischen Objektsprache zu klassifizieren. Den analytischen Sätzen entsprechen die (T)-Äquivalenzen als synthetische Urteile *a priori*.

Von Regeln gilt allerdings Folgendes – wie Lauener einmal feststellt:

> Die Adoptierung von Regeln macht diese selbst nicht zu wahren Aussagen, sondern bewirkt, dass bestimmte Sätze der Objektsprache als analytisch ausgezeichnet werden. Konventionen haben entsprechend im Sinne Kants eine konstitutive Funktion, indem sie die vorläufige Fixierung und Systematisierung unseres Begriffsapparates in einem gegebenen Kontext allererst ermöglichen.

Da wir definitorische Zusammenhänge zwischen möglichst vielen Merkmalen erstellen wollen, um eine erklärungsstarke Theorie zu bauen, kann es zu Konflikten derart kommen, dass gemäß Merkmal_1 der Term zutreffen müsste, der bezeichnete Gegenstand aber nicht ein verknüpftes Merkmal_2 erfüllt. Dadurch stellten sich in Definitionen behauptete Verknüpfungen von Merkmalen als falsch heraus. Vermeintliche und auch vorkommende Definitionen können sich insofern als *inadäquat* herausstellen, als sie einen Zusammenhang ausnutzen wollen, der nicht besteht. Ein Grund dafür ist, dass die semantischen Regeln hervorgehen aus empirisch erstellten Bezeichnungsverhältnissen und Zusammenhängen von Eigenschaften. Festlegungen von Bedeutungen ändern also nicht die beschriebene Wirklichkeit oder bringen Tatsachen zustande, die vorher nicht gegeben waren. *A priori* oder analytisch ist ein Satz relativ zu einer schon vorliegenden Sprache. Dass die Bedeutungen eben diese sind, weiß man – zumindest implizit – sobald man Mitglied der betreffenden Sprachgemeinschaft ist. Ob die Bedeutungsfestlegungen in dieser Sprache als ganzer insgesamt gute Festlegungen sind, ist eine davon zu trennende Frage. Man könnte sagen, dass man *über* die Analytizität von Sätzen *hinaus* auch noch die *Korrektheit* der Analytizität *relativ zur Wirklichkeit* untersuchen muss. Diese Frage betrifft somit das Verhältnis der Sprache zur Wirklichkeit. Die als definitorisch auftretenden Sätze (d.h. Axiome im Allgemeinen) müssen so gewählt sein, dass sie Strukturen der Wirklichkeit (seien dies mengentheoretische oder naturgesetzliche) entsprechen, was sich im Erfolg des Beschreibens und Theoretisierens sowie des Verwirklichens von in dieser Sprache gemachten Plänen zeigt.

Wenn wir eine Wahrheitstheorie für eine beliebige Sprache *L* formulieren, verwenden wir einen universellen Wahrheitsbegriff, den L_1, L_2 ... L_n teilen (auch dadurch, dass sie alle die allgemeinen Adäquatheitsbedingungen erfüllen), und eine letzte (semantisch geschlossene) Metasprache. Der letzte, nicht hintergehbare Begriffsrahmen unserer universellen Metatheorie muss Bestandteil unserer bestmöglichen Theorie sein. Betrachten wir die Einzelsprachen als Begriffsrahmen, so muss es einen *transzendentalen Rahmen* dieser Begriffsrahmen geben, von dem wir zehren, wenn wir erfolgreich interpretieren und dabei unsere Rationalität unterstellen. In der Übersetzbarkeit von Sprachen ineinander zeigt sich, dass es Invarianzen zwischen ihnen gibt. Es bleibt möglich, dass nicht viel diesen transzendentalen Begriffsrahmen ausmacht. Doch handelt es sich bei diesem Rahmen um den Ort, wo auch der Kanon von Vernunft und Verstand bzw. der Rationalität zu finden ist, also auch die Logik und die Mengenlehre.

Mit dem Akzeptieren der Existenz eines transzendentalen Begriffsrahmens muss der totale Konventionalismus, der bei Carnap mit dem Slogan „Sprachen planen“ einhergeht, abgewiesen werden.

Der strenge Konventionalismus – mit oder ohne Inkommensurabilität – scheitert selbst schon bei der Auszeichnung logischer Wahrheiten, wie schon Priors berühmtes „tonk“-Beispiel zeigt: ein Junktor „@“, der durch folgende [der „oder“-Einführung analoge] Einführungsregel $A \rightarrow A @ B$ und folgende [der „und“-Beseitigung analoge] Beseitigungsregel $A @ B \rightarrow B$ definiert wäre, würde B aus A ableiten lassen und mittels Konditionalisierung als logische Wahrheit „$A \supset B$“ mit sich bringen – *für beliebiges B*! Der Junktor würde die betreffende Sprache also durch die Ableitbarkeit aller Aussagen trivialisieren. So führt die „@“-Konvention nicht zu „Wahrheiten aufgrund von Konvention“, sondern läuft unserem intuitiven Wahrheitsbegriff entgegen.

Korrespondenz mit der Wirklichkeit kann nicht durch Konventionen hergestellt werden. Konventionen können nur versuchen, Korrespondenz zu erfassen oder nach zu zeichnen. Die Sprachrelativität der Konventionen bleibt bestehen, doch muss bezüglich von Konventionen gefragt werden, ob sie korrekt (im metalogischen Sinne) und angemessen sind. Der strenge Konventionalismus versagt somit an unserem intuitiven Wahrheitsbegriff. Vielmehr ist die Fregesche/Russellsche Auffassung, die Gesetze der Logik seien Strukturen der Wirklichkeit, nicht völlig falsch. Wieviel Unendlichkeit braucht also der universelle Begriffsrahmen?

Zurückweisen sollte man auch Carnaps These, alle ontologischen Auseinandersetzungen und entsprechende philosophische Debatten seien Scheindebatten, die sich mit Blick auf den gewählten Sprachrahmen lösen ließen. Selbst wenn alle ontologischen Fragen interne Fragen sind in dem Sinne, dass sie mit dem Gegebensein des Sprachrahmens beantwortet sind, stellt sich bezüglich der Umgangssprache gerade die Frage nach dem Gegebensein des Rahmens. Dieses Rahmenwerk liegt zunächst nirgendwo aufgeschrieben vor. Dieser Rahmen ist gerade zu *rekonstruieren*. In philosophischen Diskussionen der Ontologie der Umgangssprache geht es um entsprechende Reduktionen oder Eliminationen. Auch ZFC mag ein Versuch der Rekonstruktion unserer mathematischen Begriffe sein.

Gehen wir von einem in der (Prädikaten-)Logik eingeführten *neutralen* Gegenstandsbegriff aus, dann lassen sich die philosophischen Fragen als *interne* Fragen auffassen, als Fragen bezüglich von *Arten* von Gegenständen und dem Umfang der Domäne. Dazu müsste man Axiome aufweisen oder einführen, in denen die Existenz von Arten behauptet wird, also etwa auch die Existenz von Mengen. Zugrunde gelegt wird die Vorstellung einer allgemeinen Domäne.

§5 Das Prinzip der Domäne

Eine entscheidende Motivation zur Annahme des Unendlichkeitsaxioms ist das *Prinzip der Domäne* Cantors. Es besagt ungefähr

(D) Die Domäne der Quantifikation muss als gegeben angenommen werden.

Dies heißt auch, wie Cantor sagt, „Jede potentielle Unendlichkeit setzt eine aktuale Unendlichkeit voraus".

In semantischer Hinsicht scheint (D) kaum bezweifelbar. Ein quantorenlogischer Satz soll wahr oder falsch sein (zeitunabhängig), insbesondere Sätze der Mathematik. Für einen Allsatz heißt dies, dass alle Gegenstände, über die quantifiziert wird, eine Eigenschaft haben. Für einen Existenzsatz heißt dies, dass es mindestens einen solchen Gegenstand in der Sorte der betrachteten Gegenstände gibt. Für beides muss der Bereich der betrachteten Gegenstände vorliegen.

In der modernen Formalen Semantik wird entsprechend ein Modell für eine Menge von Sätzen (eine Theorie) u.a. definiert durch die Domäne der Gegenstände, über die quantifiziert wird. Bezüglich dieser werden Variablenbelegungen definiert, die dann eine Rolle spielen in den Wahrheitsbedingungen quantifizierter Sätze, die schließlich wahr sind *relativ* zu dieser Domäne ($\forall x$: für alle Belegungen, $\exists x$: für mindestens eine Belegung von ‚x').

Soll eine Zahlentheorie also Theoreme bezüglich der natürlichen Zahlen aufstellen, wobei diese quantifizierte Form haben – als Eigenschaften aller natürlichen Zahlen ($\forall$-Aussagen) oder als relative Existenzbehauptungen ($\forall\exists$-Aussagen) oder absolute Existenzbehauptungen ($\exists$-Aussagen) – bedarf es somit einer Domäne natürlicher Zahlen, einer aktual unendlichen Domäne.

So betrachtet drückt (U) ‚nur' aus, dass über Zahlen in $\mathbb{N}$ geredet werden soll.

Wie in *Cantors Paradies* zu sehen, hört die Domäne allerdings nicht mit $\mathbb{N}$ auf. Wir quantifizieren ebenfalls bezüglich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, also hier auch über *größere Domänen*. Vor allem: in Z sehen wir deutlich Quantoren *bezüglich aller Mengen* (etwa die Axiome wie (U))! Was ist hier die Domäne?

§6 Eine erste Kritik des Prinzips der Domäne

Prinzip (D) lässt sich auf mindestens zwei Weisen kritisieren:

(i) Man kann zurückweisen, dass beliebige Quantifikationen wahrheitsdefinit sind. In einem gegebenen Bereich sind All- und Existenzaussagen wahr oder falsch. Es kann hingegen auch Fälle geben, bei denen kein abgeschlossener Bereich vorliegt (etwa bei der Quantifikation über alle Ereignisse inklusive der zukünftigen). In diesen Fällen handelt es sich bei den quantifizierenden Sätzen um *Prognosen*, die man als ‚unwiderlegt' ansehen kann, aber nicht um wahrheitsdefinite Sätze (analog zu Sätzen über die Zukunft). Die Frage wäre also, ob es sinnvoll sein kann, einen (mathematischen) Bereich abstrakter Entitäten als ähnlich offen wie die Zukunft zu betrachten. Es handelt sich indessen um einen Bereich zeitloser Gegenstände.

(ii) Insofern man *analytische* Quantifikationen hat, ergeben sich die Wahrheitswerte nicht aus der Inspektion eines (unendlichen) Bereichs, sondern aus den *Definitionen* der entsprechenden Begriffe für Entitäten (wie Mengen oder Zahlen). Einige Axiome legen die Natur der Entitäten fest (etwa „Jede Zahl hat einen Nachfolger"). Insofern mathematische und logische Sätze analytisch sind, müssen sie sich so herleiten lassen. Empirisch-mathematische Sätze gibt es keine. Selbst wenn – aufgrund der Unvollständigkeitstheoreme – der Begriff der natürlichen Zahl in PA nicht komplett gefasst ist, handelt es sich bei den Lücken nicht um zusätzlich erworbenes kontingentes Wissen über Zahlen, bezüglich dessen man einen Individuenbereich inspizieren muss. Für die analytisch wahren mathematischen Sätze ist es sogar – zunächst – irrelevant, ob der Bereich endlich oder unendlich ist. Die Unendlichkeit tritt erst dann auf, wenn die Axiome sie fordern oder implizieren (im Rahmen i.d.R. einer konsistenten Logik).

Man kann sich allerdings die Kritik sparen, vertritt man einen mathematisch-logischen Fiktionalismus. Dann gibt es eine *Fiktion* – das Buch ZFC – in der ein unendlicher Bereich (als Quantifikationsdomäne) angenommen wird, aber daraus folgt wenig für die Wirklichkeit.

§7 Wo stehen wir epistemologisch und intuitiv? Argumente für und wider (U)

Welche logischen und epistemologischen Gründe könnte es für (U) geben? (Theologische Fragen seien zunächst außen vor.) Dazu lassen sich eine Reihe von Argumenten abwägen.

1. Das *realistische Argument für (U)* besagt: Zahlen, wenn es sie denn gibt, sind geistesunabhängige Gegenstände. Gibt es eine, muss es alle geben. Sie werden nicht von uns – Schritt für Schritt – hergestellt!

Gegenargument: Ja, es muss alle geben, aber vielleicht sind es nicht unendlich viele. Und darum geht es hier.

2. *Freges Argument* besagt: Es gibt die Einermenge zu jedem Gegenstand. Es gibt also: x, {x},{{x}} usw. Also gibt es die unendliche Menge!

Gegenargument: Wieso muss es *immer* eine Einermenge geben? Man denke nur an die Einermenge der Gesamtheit aller Mengen, diese gibt es doch – z.B. in ZFC – nicht.

3. Ein *beschwichtigendes Argument* könnte so lauten: Wir nehmen ‚nur' $\mathbb{N}$ an, nicht einfach die Gesamtheit von *Cantors Paradies*.

Gegenargument: Wegen *Cantors Theorem* erhalten wir mit dieser Annahme, (U), den Aufstieg in *Cantors Paradies* über das Potenzmengenaxiom. Und die Annahme einer Potenzmenge scheint eine natürliche Annahme, natürlicher als (U).

4. Das *Ordinalzahlenargument* besagt: Haben wir den Begriff der Ordinalzahl (als Menge ihrer Vorgänger) können wir nie irgendwo stehen bleiben, denn mit einer Menge *a* lässt sich immer die Menge ihrer Elemente vereinigt mit {a} bilden: die Menge der Ordinalzahlen kann nicht endlich sein.

Gegenargument: Selbst wenn wir den Begriff der Ordinalzahl haben, droht hier sofort die *Burali/Forte Antinomie* der größten Ordinalzahl. Die Menge Ω der Ordinalzahlen kann es nicht geben, denn als Menge ließe sie sich überschreiten. *Wo* sind dann all die Ordinalzahlen? Cantor muss hier von „inkonsistenten Totalitäten" sprechen und sieht außerhalb der Theorie das „absolute Unendliche", das sich gerade nicht begreifen lässt! Die Idee des Nichtstehenbleibenkönnens scheint also in sich widersprüchlich oder instabil.

5. Das *mathematische Argument* besagt: Wie benötigen das aktual Unendliche für die Standard-Mathematik. Diese knüpft an an die Praxis der Mathematiker und der mathematisierten Wissenschaft. Diese sind als Teil der Wissenschaft und als Basis von Technik erfolgreich.

Gegenargument: Dass es eine bestehende Praxis gibt, schließt nicht aus, dass sie – auch in ihrem Selbstverständnis – reformbedürftig ist. Zum zweiten Teil: Es stellt sich die Frage nach der Unersetzbarkeit der Gegenwartsmathematik für die Wissenschaften – und insbesondere, ob die Annahmen bezüglich unendlicher Mengen für eine mutmaßliche Unersetzlichkeit verantwortlich sind.

6. Das *Argument der Impredikativität* besagt: Potentielle Unendlichkeit steht in Konflikt nicht nur zur Extensionalität, da eine Menge zu verschiedenen Stadien der Entwicklung verschiedene Elemente hätte, sondern auch in Konflikt zu impredikativen Definitionen in der Mengenlehre. Aussonderung ist oft impredikativ. Predikative Mengenlehren können nur mit beschränkten Quantoren arbeiten (auf den schon konstruierte Objekten).

Gegenargument: Dies sind keine Schwächen, sondern Tugenden. Es gibt ausgearbeitete predikative und konstruktive Mengentheorien.

7. Das *begriffliche Argument* besagt: Bestimmte Begriffe lassen sich kategorisch nur durch Formeln der Prädikatenlogik Zweiter Stufe charakterisieren – interessanterweise auch der Begriff der Endlichkeit. Die Prädikatenlogik Zweiter Stufe nun ist nur eine verkleidete Mengenlehre aufgrund ihrer Prädikatquantoren.

Gegenargument: Das stimmt im Rahmen der Modelltheorie und ihres Verständnisses der Charakterisierung von Begriffen durch Formeln und Modelle. Ob dies indessen die beste Explikation von Begriffen ist, ist fraglich. Begriffe können wir haben und verstehen ohne Modelltheorie.

Die Idee des Zählens verknüpft sich zwar mit der des Nichtabbrechens. Dies ist jedoch der Begriff der potentiellen Unendlichkeit (als Ideal dieses Nichtabbrechens). Von dort gibt es keinen einfachen Übergang zum aktual Unendlichen – dies wäre das Ideal des *Abschlusses* des unendlichen Prozesses, ein ganz anderer Begriff bzw. der konstitutive Gebrauch der regulativen Idee des Nichtabbrechens.

Der Begriff des nicht-endlichen Prozesses, den wir per Negation bilden können (entsprechend ‚das Nicht-Endliche', ‚das Unendliche') verweisen von sich aus nicht auf das aktual Unendliche. D.h. hier kann man nicht einfach an unseren apriorischen Bestand von Begriffen appellieren. Dies gilt noch mehr für den Begriff des Nichtabzählbaren, da Nichtabzählbarkeit – *per definitionem* – jenseits der Prozesse des Zählbaren liegt, also insofern keine praktische Grundlage haben kann.

Manuel Bremer