

Vorlesung 2

Unermesslichkeit und potentielle Unendlichkeit in Antike und Mittelalter

Unermesslichkeit

- *‘Unermesslichkeit’ ist ein weiterer “un”-Begriff, drückt also eine Verneinung als Zuschreibung einer vagen negativen Eigenschaft aus.*
- *‘Unermesslichkeit’ ist ein epistemischer Begriff: Wir (als endliche Wesen) können etwas nicht ermessen (d.h. in seiner Gesamtheit überschauen).*
- *Damit kann Unermesslichkeit die Rolle spielen, die oft Unendlichkeit spielt.*
- *Das Unermessliche kann die Basis für die Extrapolation des Begriffes der Unendlichkeit sein.*

Unermesslichkeit in der Antike

- *Schon in der Antike waren sich einige Philosophen über unsere Grenzen und große Anzahlen vorzustellen im Klaren.*
- *Bei solchen Überlegungen konfrontiert man gerne das sehr sehr Kleine mit dem sehr sehr Großen. Dadurch kommen Zahlvorstellungen ins Spiel, welche den Rahmen unseren alltäglichen Vorstellungen sprengen.*
- *Archimedes (ca. 250 v. Chr.) schätzte, dass 10^{63} Sandkörner das Universum füllen könnten.*
- *Im Jainismus (ca. 600 v. Chr.) wurden Perioden des Universums von 10^{127} Jahren postuliert.*

Unermesslichkeit in der Antike II

- *Auch hatte man die Idee, wieviel es sei eine Hemisphäre von 100 Millionen Kilometern Durchmesser mit Senfkörnern aufzufüllen. [Mehr zu einer solchen Überlegung gleich.]*
- *Wie groß diese Zahlen auch sein mögen – immer handelt es sich um endliche Anzahlen.*
- *Nach heutigen Theorien gibt es ca. 10^{90} elementare Partikel im Universum.*

Der Hörsaal als Lebensaufgabe

- *Besonders klein ist ein Senfkorn: 1 qmm.*
- *Nicht besonders groß ist ein Hörsaal, sagen wir im Durchschnitt: 8m * 7m * 25m, also 1400 qm.*
- *1qm = 10⁶ qmm, also ein Hörsaal ca 10⁹ qmm.*
- *Angenommen sie zählen 10 Senfkörner in 1 Sekunde.*
- *Bei 4 Stunden Ruhe zählt man dann 720000 an einem Tag.*
- *Also zählt man einen Hörsaal in ca. 4 Jahren durch!*
- *Bei einer Lebenserwartung von 80 Jahren 20 Hörsäle.*

Der Hörsaal als Lebensaufgabe II

- *Das Beispiel zeigt, dass recht kleine Aufgaben und Bereiche der Wirklichkeit unsere Vorstellungen vom Weiterzählen und Ausmessen sprengen können.*
- *Viele Leben von passionierten Senfkornzählern wären erforderlich allein für die Universitäten der Erde!*
- *Es scheint daher naheliegend, solche Bereiche als ‘unerschöpflich’ zu verstehen – und dann scheint es nur noch ein kleiner Schritt bis zur Vorstellung eines ‘unendlichen Bereiches’, einer ‘unendlichen Ausdehnung’.*

Googol

- 1938 benannte der Mathematiker Edward Kasner die Zahl 10^{100} als "googol". [Wie gehört, gibt es mit 10^{90} wesentlich weniger Elementarteilchen im Universum.]
["Google" geht über einen Schreibfehler auf "googol" zurück.]
- In Basis 10 lässt sich die Zahl schnell ausschreiben:
10.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.
000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.
.000.000.000.000.000.000
- Es gibt allerdings auch googolplex: $10^{10^{100}}$ d.h. $10^{10^{100}}$

Googolplex

- *Es gibt mit googolplex (10^{googol}) eine Zahl, die sich selbst in Basis 10 in menschlicher Lebensdauer noch nicht einmal aufschreiben lässt! (Daher abkürzende Namen)*
- *Selbst die Zeit bis zum Ausbrennen der Sonne (und dem mutmaßlichen Ende der Menschheit), 10 Milliarden Jahre, reicht nicht zum Aufschreiben von googolplex.*
- *Sowohl im Alltag als auch bei Messungen (etwa der Physik) haben Zahlen mit mehr als 35 Nachkommastellen keine Anwendung. [Vgl. Die Planck-Länge von $16 \cdot 10^{-35}$, eine weitere Teilbarkeit schließt die Quantenphysik aus.]*

Endliche Zahlenerfahrung

- *Alle Zahlen, die jemals von irgendjemand benutzt wurden – ja sogar die Summe dieser Zahlen – sind kleiner als eine bestimmte Zahl. Alle größeren Zahlen waren unnötig.*
- *Dasselbe gilt für alle Zahlen, die von endlichen Wesen in einem endlichen Universum jemals verwendet werden. Sie sind kleiner als eine bestimmte Zahl. Alle größeren Zahlen sind unnötig und werden unnötig sein.*

Endliche Zahlenerfahrung. Bewertung

- *Es scheint also, dass real nur benötigt wird: Die Idee eines für uns unerschöpflichen Vorrates (von Zahlen und Notationen).*
- *Unendlichkeit erscheint als eine Idealisierung, die zur mutmaßlich einfacheren Systematisierung dient: ein Begriff der Unendlichkeit.*
- *Damit stellt sich die Frage, ob diesem Begriff etwas korrespondiert.*
- *Insbesondere scheint die Idee potentieller Unendlichkeit ausreichend.*

το απειρον (to apeiron)

- *Anaximander (ca. 600 v. Chr.) führt den Begriff ‘to apeiron’ (das Grenzenlose) ein. Damit soll eine Kategorie jenseits aller anderen Kategorien bezeichnet werden.*
- *Der Philosoph (Aristoteles) definiert das Unendliche als ‘nicht durchschreitbar’.*
- *Im Hintergrund liegt also die Vorstellung eines unendlichen/unabschließbaren Prozesses (des Durchschreitens) – potentielle Unendlichkeit.*

Aristoteles I

- *Der Philosoph reagiert schon auf die frühe griechische Mathematik (Euclid, Pythagoras), insbesondere auch auf Zenos Paradoxien.*
- *Zeno behauptet, wie gehört, dass Achilles die Schildkröte nicht einholen kann, denn es lassen sich in endlicher Zeit nicht unendlich viele Aufgaben vollbringen.*
- *Vorausgesetzt wird (a) die unendliche Teilbarkeit der Zeit und der Strecke, (b) 'Bewegung' definiert als das Überbrücken einer Strecke.*
- *Wie gehört, kann man (a) bezweifeln.*

Aristoteles II

- *Aristoteles Definition des Unendlichen legt nahe, dass er nicht behaupten kann, eine Unendlichkeit von Aufgaben abzuschließen.*
- *Der Philosoph löst das Problem begrifflich, indem er (b) verwirft zugunsten einer besseren Definition von "Bewegung". Bewegung ist Strecke auf Zeit.*
- *Gemäß dieser Definition der Bewegung muss Achilles nicht mehr unendlich viele Aufgaben vollbringen.*
- *Zählen kann man zur Unendlichkeit nicht: to apeiron.*

Aristoteles III

- *Auflösung von Zenos Paradoxie:*
 - *Achilles läuft 10 Meter pro Sekunde*
 - *Die Schildkröte läuft 1 Meter pro Sekunde*
 - *Also: Achilles wird die Schildkröte überholen, da er schneller ist*
 - *Man kann die Stelle des Überholens berechnen: 111.111111 m*
 - *Modern würde man über die Konvergenz der beiden Serien von Schritten argumentieren:*
 - $100 + 10 + 1 + 1/10 + 1/100 \dots \rightarrow 111.111111$
 - $10 + 1 + 1/10 + 1/100 + 1/1000 \dots \rightarrow 11.111111$

Aristoteles IV

- *Der Philosoph behauptet die Existenz des Unendlichen.*
- *Argumente:*
 - *Sonst hätte die Zeit einen Anfang und ein Ende*
 - *Sonst könnte (wie in Euclids Geometrie) der Raum nicht unendlich sein.*
 - *Eine Linie wäre nicht beliebig teilbar.*
- *Ob diese Argumente gut sind, sei zunächst dahingestellt.*
- *Sie zielen auf die Akzeptanz des potentiell Unendlichen. Das aktual Unendliche lehnt der Philosoph ab.*

Aristoteles V

- *Der Philosoph lehnt die aktuale Unendlichkeit ab. Selbst die Unendlichkeit der Vergangenheit gibt, obwohl es sich um unendlich viele Ereignisse handelt, keine aktuale Unendlichkeit, da sie alle vergangen sind (nicht jetzt als Kollektion vorliegen). Auch dies ist ein begriffliches Argument.*
- *Ironie des Adepten: Thomas von Aquin lehnt eine unendliche Reihe von Ursachen ab: es muss eine erste Ursache geben: Gott. (Aristoteles selbst hatte so für den 'ersten Beweger' argumentiert.)*

Aristoteles VI

- *Ähnlich bei der Linie: Aristoteles behauptet ihre potentielle Teilbarkeit. Die vollendete Unterteiltheit lehnt er ab: der Prozess des Teilens ist to apeiron.*
- *Ironie des Adepten: Wilhelm von Ockham akzeptiert die aktuelle Unendlichkeit, insofern mit der Teilbarkeit auch das Gesamt der Teile vorliegen müsse.*

Aristoteles und Euklid

- *Aristoteles übernimmt die Argumente Euklids für das potentiell Unendliche.*
- *Euklid betont nicht nur das Weiterzählen (jede Zahl hat einen Nachfolger), sondern gibt konstruktive Beweise z.B. für die Unendlichkeit der Reihe der Primzahlen. [(I) Jede Zahl ist primfaktorisiert; indirekt beweisbar. (II) Aufweis einer neuen Primzahl nach den Primzahlen $p_1 \dots p_n$: $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ kann nicht durch $p_1 \dots p_n$ teilbar sein, muss aber primfaktorisiert sein.]*
- *Im Unterschied zu vielen modernen nicht-konstruktiven Beweisen von Unendlichkeiten (etwa in ZFC usw.).*

Reflexion zu Aristoteles' Konzeption

- *Werden hier neue Zahlen gemacht? Welche Ontologie der Mathematik wäre das?*
- *Im Unterschied zu seinen Vorgängern ist für den Philosophen das Unendliche nicht das, das kein Außen hat, sondern gerade das, welches immer noch (und wieder) ein Außen hat. - "Wo?" möchte man fragen. Wie liegt denn dieses Außen vor?*
- *Will man das vorliegende (aktuale) unendliche Außen nicht annehmen, bleibt nur die konstruktivistische Position des schrittweisen Hervorbringens! Das wäre ein Anti-Realismus in der Logik und Mathematik.*

Aristoteles und die Zeit

- *Das Musterbeispiel für potentielle Unendlichkeit scheint die Zeit zu sein. Das Sein entfaltet und bewegt sich in die Zukunft.*
- *Die Zukunft ist – in keinem Sinne von ‘Existenz’ - vorhanden. Die Zeitreihe ist potentiell, nicht aktual.*
- *Deshalb sind für den Philosoph Aussagen über die Zukunft zumeist wahrheitswertindefinit (vgl. die Seeschlacht).*
- *Das Ausgehen von der Zeit überträgt sich auf alle Operationen (wie Zählen), insofern sie Zeit benötigen.*

Negative Metaphysik

- *Parmenides (500 v. Chr.) ist bekannt für seine Ablehnung des Begriffes 'das Nichts' und ähnlicher Begriffe.*
- *Die Wirklichkeit ist für Parmenides 'das Eine': ganzheitlich und unendlich – also eine aktuelle Unendlichkeit!*
- *Es finden sich in ihr keine Unterschiede, die Negation lehnt Parmenides ja ab.*
- *Insofern lässt sich nichts Differenziertes über die Wirklichkeit – und damit über das Unendliche – sagen!*

Gottes Unendlichkeit

- *Im Mittelalter fragt man nach Gottes Unendlichkeit:*
 - *Kann Gott die aktuale Unendlichkeit schaffen? Eine Frage der Allmächtigkeit.*
 - *Wenn Gott zu allen Zeiten existiert und unveränderlich ist, kann die Zeit nicht 'wachsen', da Gott dann Neues lernen müsste. Eine Frage der (internen) Veränderlichkeit Gottes, verbunden mit der Frage der Allwissenheit und der Existenz von Freiheit.
[Damit befasst sich hier Vorlesungsblock 10]*
- *Wenn Gott unendlich ist, was heißt das? Wie soll man darüber sprechen können?*

Negative Theologie

- *Ein Vorschlag, über Gottes Unendlichkeit zu reden, verweist auf den synkategorematischen Gebrauch von Ausdrücken (d.h. in einem Kontext bzgl. Gott wird jeder Ausdruck uneigentlich gebraucht, insofern jede endliche Eigenschaft von Gott übertroffen wird).*
- *Nikolaus von Kues (ca. 1400) entwickelt eine ‘negative Theologie’:*
 - *Gott ist der Unendliche, das ‘Absolute Maximum’.*
 - *Wir können es niemals erfassen.*

Negative Theologie II

- *Für Nikolaus von Kues (Cusanus) sind sogar Vergleiche Gottes mit Bekanntem problematisch, da wir zu einem Vergleich beide Relata begreifen müssen.*
- *Das Unendliche (Gott) muss für Cusanus auch Gegensätze enthalten, also wahre Widersprüche! Diese kann unsere Rationalität jedoch nicht denken.*
- *Aufgrund der Gegensätze ist Gott das absolute Maximum und zugleich das absolute Minimum!*

Reflexion zur Negativen Theologie

- *Das Problem, das die Negative Theologie aufspürt, ist.*
 - *Ist für uns das aktual Unendliche überhaupt beschreibbar bzw. denkbar?*
 - *Ist das aktual Unendliche unausdrückbar, unfassbar?*
- *Mystiker, wie Cusanus, verorten den Zugang zum Unendlichen in der Intuition (im Glauben). Religiös gesprochen: Wir haben Teil am Unendlichen durch Gottes Gegenwart in uns.*

Reflexion zur Negativen Theologie II

- *Wir erkennen unsere Endlichkeit, laut Cusanus, gerade im Bedenken der aktualen Unendlichkeit! Der Begriff 'aktuale Unendlichkeit' dient also der Abgrenzung.*
- *Cusanus redet aber trotzdem weiter, redet also inkonsistent, aber in mehr oder weniger verständlicher Weise! Es deutet sich hier die Thematik einer inkonsistenten Dialektik des Unendlichen an.*

Unterscheidungen

- *In der Antike wird somit die wichtige Unterscheidung zwischen dem potentiellen und dem aktual Unendlichen eingeführt.*
- *Befürwortet wird eine Konzeption nicht endender Reihen. Das Musterbeispiel liefert die Progression der Zeit.*
- *Antike und Mittelalter stoßen auf Schwierigkeiten, wie man das aktual Unendliche überhaupt erkennen können soll.*
- *Im Bereich der Logik/Mathematik scheint die Idee eines potentiell Unendlichen ohne aktuales problematisch.*