Vorlesung 8

Konstruktiver Finitismus
& Wittgensteinscher Finitismus

Vorbemerkung

- *Einige Finitismen (wie die Theorie der Zillionen oder die Finite Mengenlehre) teilen den realistischen Hintergrund von ZFC: es gibt Zahlen/Mengen, eben nur nicht unendlich, sondern indefinit oder endlich viele.*
- *Demgegenüber lassen sich ontologisch anders motivierte Finitismen einführen – zum ersten solche, welche das potentiell Unendliche im Gegensatz zum aktual Unendlichen ansetzen, was zu Formen des Konstruktivismus führt.*
- *Zum zweiten stärkere Formen des Anti-Realismus.*

Vorbemerkung II

- *Ein konstruktivistischer Finitismus wird sich vor allem im Verständnis der Allquantifikation unterscheiden. Abgelehnt wird das Prinzip der Domäne.*
- *‘Konstruktivismus’ meint hier eine ontologische Position, die nichts mit den feuillitonistischen ‘Konstruktivismen’ der Gegenwart zu tun hat.*
- *Die hier vorgestellte Variante knüpft an verschiedene Schriften Wittgensteins an, ohne eine Interpretation Wittgensteins zu liefern.*

Allquantifikation

- In einem endlichen Bereich lässt sich der Allquantor in eine endliche Konjunktion auflösen. Im Prinzip könnte man alle Objekte durch Aufzählung benennen: $Objekt_1$, $Objekt_2$ …
- In diesem Sinne unstrittig sind beschränkte Quantoren:

  $(\forall x<n)F(x)$
- Allquantoren im engeren Sinne sind nötig, wenn uns irgendwann die Namen ausgehen. (In diesem Sinne geht eine modelltheoretische Semantik über substitutionelle Quantifikation hinaus.)

Allquantifikation II

- *Erweitert sich der Bereich ständig (etwa durch Progression der Zeit oder der Konstruktion), ändert sich ständig die referentielle Bedeutung (Extension) des Allquantors!*
- *Deswegen erlaubt die konstruktive Mathematik keine impredikativen Mengendefinitionen.*
- *Ein $\forall$-Satz könnte nun allerdings zu einer Zeit wahr und zu einer anderen Zeit falsch sein!*

Allquantifikation III

- *Allquantifikationen verhalten sich dann so wie Sätze, die ihren temporalen Index/Ort nicht deutlich machen, aber in einem temporalen Zusammenhang interpretiert werden, z.B.*
  (*) Heute regnet es.
- *Sind Allsätze also in diesem (oder einem ähnlichen) Sinne indexikalisch bezüglich einer von Sprechsituation zu Sprechsituation wechselnden Domäne?*
- *Das wäre eine Möglichkeit einer radikalen Uminterpretation der Allquantifikation.*

Analytische Allquantifikation

- *Einige Allquantifikationen werden jedoch von Veränderungen der Domäne nicht betroffen: analytische.*
- *Wie schon bei der Diskussion des Prinzips der Domäne bemerkt, ließen sich ZFC-Allquantifikationen auf diese Weise verteidigen.*
- *Das kann jedoch nicht auf alle Allsätze zutreffen, wenn sich die Domäne tatsächlich ändert. Etwa könnte ‘alle Objekte bisher’ kleiner sein als ein bestimmter Rang in V.*

Analytische Allquantifikation II

- *Es bleibt also ein Problem mit der Semantik des Allquantors in einer nicht aktual unendlichen Domäne, die sich unter Umständen als potentiell unendlich erweiterbar darstellt.*
  (Wäre sie strikt finit, bräuchte es ja überhaupt nicht der Quantifikation.)

Zwei Auffassungen von Allsätzen

- *Man könnte nun Allsätze auf zwei Weisen neu auffassen:*
- *(a) als nicht wahrheitsdefinit, sondern mit einem Gewissheitsgrad versehen, so wie Prognosen; dieser Grad könnte steigen mit weiteren Bestätigungen.*
- *(b) als nicht mit einem Gewissheitsgrad versehen, sondern als Annahmen ‘bis auf Weiteres’, die höchstens falsifiziert werden können, aber jetzt als wahr unterstellt werden.*

Zwei Auffassungen von Allsätzen (II)

- *Dieses Vorgehen erinnert an das Vorgehen mit empirischen Verallgemeinerungen und Prognosen in einer sich verändernden Umwelt. (Ein Verfahren also, das sich in den empirischen Wissenschaften bewährt hat.)*
- *Die Schwierigkeit, dieses Denken auf die Mengenlehre/ Mathematik auszudehnen, scheint darin zu liegen, hier zu bestimmen, was als Bestätigung oder Widerlegung oder als angemessener Gewissheitsgrad gelten soll (Letzteres insbesondere, wenn die Gesamtdomäne nicht bekannt ist).*

Gewissheit von Quantifikationen

- *Die Gewissheit ließe sich verstehen als diejenige bisher immer erfolgter Bestätigung bzw. Nichtwiderlegung (d.h. ohne einen Grad anzugeben).*
  In diesem Sinne bietet sich eher die Option (b) an.
- *Was als Widerlegung bei Allsätzen zählt ist klar:*
  ► eine Instanz ohne die betreffende Eigenschaft.
- *Was als Bestätigung von Existenzsätzen zählt ist klar:*
  ► Aufweisen einer Instanz.
- *Dies ähnelt – deckt sich mit – der intuitionistischen bzw. konstruktivistischen Auffassung von “$\forall$" und "$\exists$"*

Wittgenstein

- *Eine Position dieser Art hat Wittgenstein – zumindest in seiner mittleren Periode – vertreten, z.T. auch schon im <u>Tractatus logico-philosophicus</u> (TLP). Die Interpretation des TLP ist schwierig, da hier noch weniger als später klar zwischen zu widerlegender Position und eigener Position unterschieden wird. Die <u>Bemerkungen zu den Grundlagen der Mathematik</u> (BGM) sind eine Kollektion nachgelassener Fragmente, ebenso wie diesbezügliche Bemerkungen im <u>Großen Typusskript</u>. Mathematik spielt keine besondere Rolle in den <u>Philosophischen Untersuchungen</u>, dem einzigen authorisierten Werk nach dem TLP.*
- *Eine zusammenhängende Interpretation soll hier deshalb auch nicht versucht werden. Die BGM liefern systematische Bausteine.*

Finitismus im Tractatus

- *Der TLP vertritt z.T. eine operationalistische Auffassung der Mathematik. Damit deutet sich der spätere Regelbegriff an.*
- *Allquantifikation soll – wie die Prädikatenlogik überhaupt – aufgelöst werden in Aussagenlogik (hier: Konjunktionen).*
- *Später (1929) lehnt Wittgenstein ausdrücklich unendlich lange Konjunktionen ab; es bleiben so nur finite Konjunktionen.*
- *Abgelehnt wird im TLP Mengenbildung ohne Vorschrift (d.h. ohne eine die Menge definierende Formel); insofern kann es überhaupt maximal abzählbar unendlich viele Mengen geben.*

Finitismus im Tractatus II

- *Das Mengenuniversum des TLP is maximal das Gödelsche 'Konstruktive Universum' L; vgl. auch Russells 'no class'-Phase.*
- *Die Paradoxien der Mengenlehre sollen durch Ablehnung der Imprädikativität vermieden werden, einer schrittweisen Mengenbildung also. Die 'Russells-Menge' z.B. ist imprädikativ.*
- *Die an einigen Stellen verwendete Rede vom logischen Raum als 'unendlichen Ganzen' hat Wittgenstein später als 'fehlerhaft' zurückgenommen.*
- *Eine Auswahlfunktion macht laut TLP nur im endlichen Fall Sinn.*

Wittgensteins mittlere Periode

- *Wittgenstein entfernt sich nach dem TLP immer weiter von der Standardmathematik.*
- *Seine Rückkehr in die Philosophie Ende der 1920er war von Fragen der intuitionistischen/konstruktiven Philosophie der Mathematik veranlasst.*
- *Wittgensteins Finitismus im engeren Sinne beginnt um 1930 und findet sich vor allem in den BGM.*
- *Das authorisierte Spätwerk PU (Beginn schon in den späten 30ern) befasst sich nicht mehr zentral mit Logik oder Mathematik.*

BGM

- *Ein Satz über alle Zahlen ist keine Behauptung, sondern gezeigt wird ein Schema, dass sich auf beliebige Zahlen ausdehnen lassen soll. 'Theoreme' sind insofern im Allgemeinen keine Behauptungen.*
- *Besonders trügerisch sind "usw" bzw. "...". Darin zeigt sich eine Möglichkeit des Symbolismus. Wir sagen nicht "dass es weiter geht, ohne je anzuhalten – dass es unmessbar zunimmt, sondern dass die Institution des Endes fehlt".*

BGM II

- *Eine Regel behauptet nicht ihre unendliche Anwendbarkeit (Anwendung auf einer unendlichen Domäne), sondern zeigt sie als Möglichkeit.*
- *Der Ausdruck “unendlich” macht nur Sinn in Verbindung mit solchen Regeln*

  *[im kantischen Sinne hat er regulative keine konstitutive Verwendung]***.**

BGM III

- *In diesen Betrachtungen zu Regeln unterscheidet sich Wittgenstein (insb. später in den PU) auch von den Intuitionisten, insofern die Praxis des gesamten Sprachspiels mit den Regeln umzugehen, dem Verständnis der einzelnen Regeln vorausgeht und dieses mitkonstituiert – während im Intuitionismus einzelne Regeln das Fundament für ein konstruktutives Gebäude/System liefern.*
  (In diesem fundamentalistischen Sinne ist Wittgenstein kein Konstruktivist.)

BGM IV

- *Es gibt nur solche (z.B. reele) Zahlen, für die wir solche Regeln angeben (womit sofort ein Problem mit den transzendenten Zahlen auftritt) – wir haben de facto das 'rekursive Kontinuum'.*
- *Was die Cantorsche Diagonalisierung zeigt ist nicht ein Aufweis einer überabzählbaren Menge, sondern dass der Ausdruck "Reihe aller reelen Zahlen" keinen Sinn macht.*
- *Das Diagonalverfahren lässt sich als eine Regel verstehen, immer weitere reele Zahlen zu konstruieren.*
- *Demgegenüber präsentieren Dedekindsche Schnitte gerade keine Regel, sondern bloß ein Bild.*

BGM - Fazit

- *Wittgenstein beginnt nicht mit einer Ontologie oder einem intendierten Anwendungsbereich der reinen Mathematik, sondern betrachtet die sprachlichen Operationen, die Sprechweisen, welche die Mathematik konstituieren.*
- *Zu klären bleibt die Frage, ob diesen Sprechweisen etwas entspricht und wieso die Mathematik in den angewandten Wissenschaften nützlich ist. Der Begriff der Praxis weist hier auf einen Ansatz.*

BGM – Das Problem des ‘Zeigens’

- *Insbesondere Wittgensteins Rede vom ‘Zeigen’ ist insofern unbefriedigend als an die Stelle einer problematischen Ontologie (des aktual Unendlichen) eine mehr als problematische Epistemologie des Unaussprechlichen tritt.*
- *Für das ‘Zeigen’ gilt dasselbe Dilemma wie für Schemata:*

  Entweder kommt das Gezeigte der Behauptung eines Allsatzes gleich, der dann wahr sein müsste, oder es bleibt unklar, was genau wir hier erfassen.

Grenzen des Konstruktivismus

- *Die Rede von ‘Konstruktion’ ist anti-realistisch, eigentlich macht sie nur nominalistisch Sinn, denn was sollte es heißen, Zahlen als Objekte zu konstruieren? Wo sind sie und bleiben sie dann?*
- *Konstruktivisten reden hier von sich weiter zeigenden Objekten, doch können diese nicht – ohne aktuale Unendlichkeit – als schon vorher daseiend behauptet werden. Täte man dieses, legte man sich auf das aktual Unendliche fest und es ginge allein um das epistemische Problem der Bewährung von Quantifikationen.*

Grenzen des Konstruktivismus II

- *Die konstruktivistische Position verweist also eher auf eine potentiell unendliche Tätigkeit des Umgehens mit Zeichen, nicht mit Objekten.*
- *Insofern weist diese Position schon in die Richtung auf nihilistische Positionen bezüglich von Mengen und Zahlen.*