VOM INFINITESIMALEN ZU CANTORS PARADIES

Vorlesungen zum Begriff der Unendlichkeit. Vorlesung 3

Manuel Bremer
University of Düsseldorf, Germany
www.mbph.de

Das unendlich Kleine

- In der Neuzeit tritt zu Beginn der neuzeitlichen Mathematik (der Entwicklung der Analysis) die Idee einer infinitesimalen Größe auf (einer unendlich kleinen Größe).
- Es handelt sich bei der Analysis – letztendlich – um eine Erfolgsgeschichte. Die Analysis gehört zur Basis der modernen Mathematik.

- Allerdings handelt es sich um eine Erfolgsgeschichte (i) erst bezüglich der dann klärend folgenden Einführung des Begriffs des Limits und – wesentlich später (im 20ten Jahrhundert) – (ii) bezüglich der Nicht-Standard-Analysis, die tatsächlich mit Infinitesimalen (als einer besonderen Klasse von Zahlen rechnet.

Begriffsprobleme ‚infinitesimal'

- Was soll das eigentlich heißen ‚unendlich kleine Größe'?
Wir kennen kleine Zahlen (rationale Zahlen etwa) und wir kennen die Nicht-Größe, die Null-Größe, die 0.

- Eine unendlich kleine Größe müsste sehr klein sein, aber nicht nichts.

- Geben wir den Wert einer solchen unendlich kleinen Größe an, wäre sie eben *nicht* unendlich klein, da wir durch Verminderung zu einer kleineren Größe kommen!

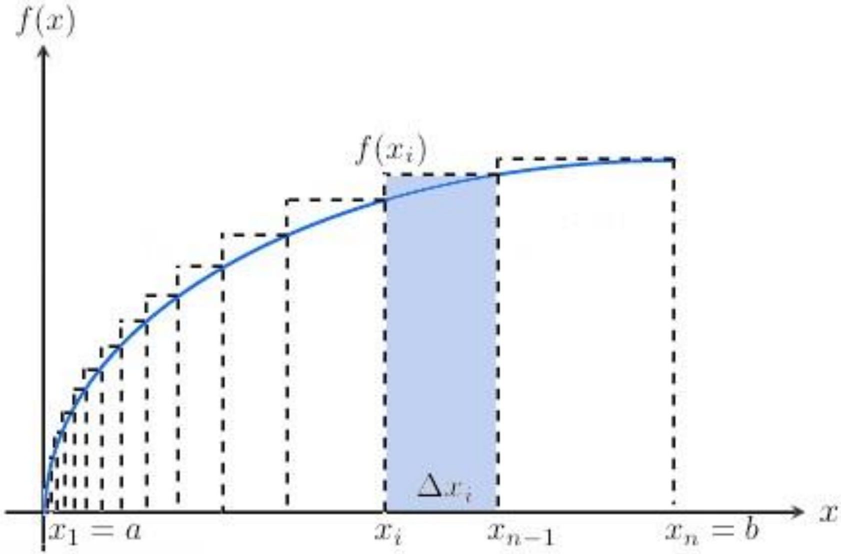
• Wir können somit *keinen Wert* einer unendlich kleinen Größe angeben! Doch sie soll einen Wert haben. Hier droht ein Mysterium.

• Das Unendliche – hier in Form des unendlich Kleinen – erscheint wieder unbestimmbar, nicht (konkret) beschreibbar. Beliebig klein, jedoch *indefinit*.

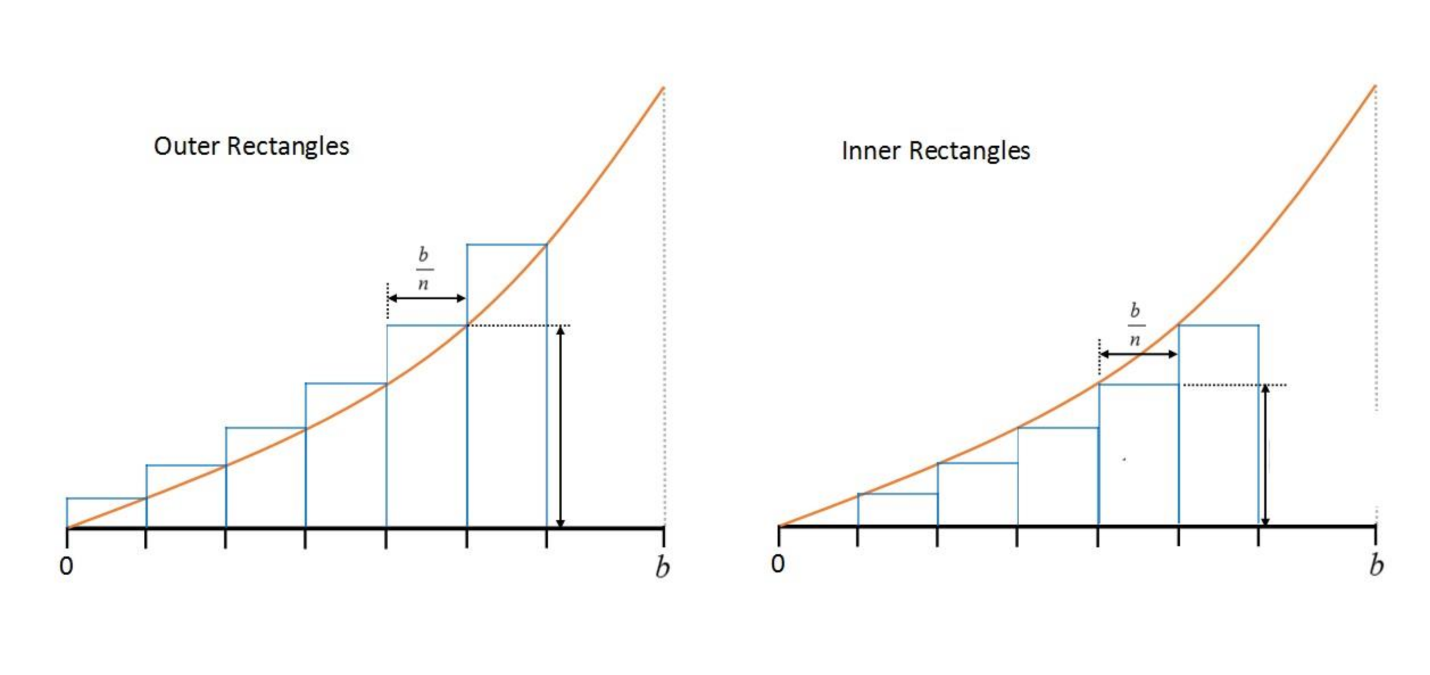
• Die Verwendung und Rede von unendlich kleinen Größen (bei Newton und Leibniz) gilt zugleich und daher als Musterbeispiel einer *geduldeten Inkonsistenz* in der Wissenschaft, die frühe Analysis als Beispiel für eine parakonsistente Theorie.

Die Methode der Erschöpfung

- Die frühe Analysis knüpft an die schon in der Antike bekannte ‚Methode der Erschöpfung' an.
- In der Antike wurde sie eingesetzt zur Bestimmung des Flächeninhaltes unregelmäßiger Figuren.
- Bei Newton wird sie verwendet zur Bestimmung des Wertes eines Integrals und zur Bestimmung der Ableitung einer Funktion.



(method of exhaustion)


Outer Rectangles
b/n
0
b
Inner Rectangles
b/n
0
b

- Die Annäherung erfolgt durch immer weitere Verkleinerung der Intervalle (Breite der Rechtecke). Je kleiner die Breite, um so genauer die Erfassung des Integrals bzw. um so geringer die Abweichung der Steigung/Ableitung von einer Geraden zwischen zwei Punkten.
- Leibniz setzt die Idee geringster (infinitesimaler) Abweichung ein, um die Steigung/Ableitung einer Funktion zu bestimmen.
- Die minimale Größe (‚unendlich klein‘) sei: ε

• Beispiel: $f = x^2$

$$\frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = 2x + \varepsilon$$

Da nun ε beliebig klein (‚infinitesimal') ist, kann man von ε absehen, also $f'(x^2) = 2x$

• *Problem:* Im zweiten Schritt war $\varepsilon \neq 0$ (wegen des Teilens).

D.h. einmal ist $\varepsilon = 0$ einmal $\varepsilon \neq 0$ ↯

• Wie dann sobald Berkeley kritisierte. ε erscheint als inkonsistentes Objekt!

- Analog wird bei $\varepsilon > 0$ die Fläche unter der Kurve (das Integral) nicht erschöpft.
- Trotz der Inkonsistenz wurde der ‚calculus‘ sofort eingesetzt, da auch Näherungswerte nützlich sind.
- Wie lässt sich indessen die Inkonsistenz auflösen?

Eine begriffliche Lösung der ε-Inkonsistenz

- Eine Lösung besteht in der Abkehr von Infinitesimalen, die sich damit als *nicht erforderlich* erweisen.
- Dies geschieht bei Cauchy mittels Serien und dem Begriff des Limits, bei Weierstrass führt dies zur Formulierung des δ/ε-Kriteriums:

Ein Funktionswert *f(a)* tendiert zu einem Limit *l* in der Nähe von *a* genau dann, wenn der Funktionswert beliebig nahe (*l*-*ε*) an das Limit herangeführt werden kann, wenn man sich δ nahe an *a* bewegt:

$$|x - a| < \delta \text{ gdw. } |f(x) - l| < \varepsilon$$

• Was passiert bei diesem Vorgehen? Eine unendliche Größe (eine unendlich kleine), die vorliegt (*aktual* ist), wird aufgegeben zugunsten *potentieller Unendlichkeit* (der seriellen Annäherung), für jedes δ ein ε.

- Man vergleiche Aristoteles‘ begriffliche Strategie mit Zenos Paradox umzugehen.
- Entsprechend der Begriff der Konvergenz:

$$|a_1 + a_2 + \ldots a_n) - l| < \varepsilon \text{ für jedes } \varepsilon \text{ ab einer Stelle } n > m$$

Eine ontologische Lösung der ε-Inkonsistenz

- Man kann – in einer *axiomatischen Ontologie* – Infinitesimale als spezielle Zahlenklasse einführen – analog zu ‚komplexen Zahlen'.
- Man muss dann (i) alle üblichen Operationen (‚+' etc.) neu definieren, (ii) zeigen, dass die gewünschten Ergebnisse sich konsistent ergeben.
- Insbesondere Division ist bei (i) zu beachten. Ist nämlich $\varepsilon<q$ für $q\in\mathbb{Q}$, heißt dies mutmaßlich $1/\varepsilon > q\in\mathbb{Q}$ (unendliche Größe)!

- Eine Variante eines solchen Ansatzes ist *Robinsons Nicht-Standard-Analysis*.
- Bewahrt werden alle Eigenschaften aus ℝ, die sich mit beschränkter Quantifikation ($\forall x<r$) ausdrücken lassen.
- Die ‚Hyperreals' ℝ* enthalten sowohl Infinitesimale als auch (per Konversion) unendlich Großes.
- $r\in\mathbb{R}^*$ hat eine Komponente $r\in\mathbb{R}$ und eine infinitesimale Komponente (vgl. die komplexen Zahlen).
- Es gibt mehrere Modelle für ℝ* (nicht-konstruktiv beweisbar).

- Hier nun werden Limits (d.h. potentielle Unendlichkeit) ersetzt durch arithmetische Operationen mit *aktualen* unendlichen Größen!

- Die Nicht-Standard-Analysis wurde erfolgreich eingesetzt z.B. in der Flüssigkeitsdynamik. Allerdings: Wegen der Äquivalenz zu Berechnung in $\mathbb{R}$ (mit beschränkten Quantoren) muss es auch entsprechende Resultate der Analysis geben. Einige von ihnen sind indessen nicht bekannt!

Ontologische Bewertung der Nicht-Standard-Analysis

- $\mathbb{R}^*$ ist nutzbar. Im Sinne eines Realismus wäre man geneigt, auf die Wirklichkeit der entsprechenden Entitäten zu schließen.
- Auf der anderen Seite lässt sich Nutzbarkeit immer instrumentalistisch verstehen. Die Nützlichkeit besteht in der größeren Einfachheit der Herleitungen. Gerade die Äquivalenz zu Resultaten in $\mathbb{R}$ zeigt, dass man die über $\mathbb{R}$ hinausgehenden ontologischen Postulate nicht machen muss.

Dedekind Unendlichkeit

- Die Mathematik des 19ten Jahrhunderts begründete mit dem Begriff des Limits die neue Mathematik.
- Zugleich führte sie allerdings auch das *aktuale* Unendliche ein.
- Dedekinds Definition knüpft gerade an einige Paradoxien des Unendlichen an:

> Eine Menge A ist unendlich gdw. sie gleichmächtig zu einer ihrer echten Teilmengen ist.

- ‚Gleichmächtigkeit' wird definiert als das Vorliegen einer Korrespondenz (1:1) zwischen den Elementen zweier Mengen.
- Indem man eine Korrespondenz vorführt, kann man zeigen, dass die Mächtigkeit (‚Kardinalität') zweier Mengen übereinstimmt, z.B. bei der Menge der natürlichen Zahlen und der Menge der geraden natürlichen Zahlen, denn y=2x ist eine Korrespondenz.
- Die Definition und die entsprechenden Resultate scheinen kontraintuitiv, da sie für endlichen Mengen keine Entsprechung haben, daher der paradoxe Eindruck von ‚Hilberts Hotel' usw.
- Auch kontraintuitiv sind die trotz Korrespondenz doch scheinbar bestehenden Lücken in der echten Teilmenge.

Cantor zählt ab

• Man kann auch zeigen $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. Cantor zeigte dies zum einen durch seine Codierungsfunktion, die ein Paar von Zahlen, das u.a. auch für $q \in \mathbb{Q}$ stehen kann, auf eine Zahl abbildet:

$$\pi(x,y) = y + ½\, (x + y)(x + y + 1)$$

Also $\pi(3,7) = 7+½(3+7)(3+7+1) = 7+ ½\ 110 = 62$, $\pi(7,3) = 58$.

• Man kann auch eine *Abzählung* der rationalen Zahlen vornehmen (eine Abzählung ist eine Korrespondenz zu $\mathbb{N}$).

Typischerweise präsentiert man dies als tabellarische Abzählung:

	1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	...
2	$\frac{2}{1}$	$\cancel{\frac{2}{2}}$	$\frac{2}{3}$	$\cancel{\frac{2}{4}}$	$\frac{2}{5}$	$\cancel{\frac{2}{6}}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{8}$	...
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\cancel{\frac{3}{3}}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{8}$	...
4	$\frac{4}{1}$	$\cancel{\frac{4}{2}}$	$\frac{4}{3}$	$\cancel{\frac{4}{4}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{4}{8}$	...
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{8}$	...
6	$\frac{6}{1}$	$\cancel{\frac{6}{2}}$	$\cancel{\frac{6}{3}}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{6}{8}$	...
7	$\frac{7}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{7}{8}$	...
8	$\frac{8}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{4}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{8}{8}$	...
⋮	⋮								

- Cantor stellt sich nun die Frage $|\mathbb{N}| = |\mathbb{R}|$?
- Hier lässt sich anknüpfend an das vorhergehende Abzählen ein Gegenbeweis finden.
- $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}$. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.   [Also gibt es *mehrere* Unendlichkeiten!]

Beweis: Angenommen wir hätten eine mutmaßliche Abzählung der reellen Zahlen $r \in]0,1[$ (rechts nur die Nachkommastellen):

1	34749299891890148401808408108108014810…
2	26262727272828299820849749791797901701…
3	72829971794790174979147971971927949270…

usw.

Nun definiert man ein $q \in]0,1[$, dass sich an der 1ten Stelle von der ersten aufgezählten Zahl unterscheidet, an der 2ten Stelle von der zweiten aufgezählten Zahl usw. (also immer mindestens sich in der Diagonale unterscheidet).
Diese Zahl muss, gemäß Annahme der Aufzählbarkeit, in der Liste existieren, kann dies jedoch nicht, da sie sich dann, nach ihrer Definition, von sich selbst unterscheiden müsste ↯

- Also sind selbst die reellen Zahlen im Interval]0,1[nicht abzählbar. Sie sind ‚überabzählbar'. Es gibt somit *überabzählbare Unendlichkeiten.*

- Mit dem Überabzählbaren betreten wir ‚Cantors Paradies' der immer größeren (voneinander unterschiedenen) Kardinalitäten.

Betrachtungen zum Abzählen

- Man kann sofort einige interessante Betrachtungen anstellen:

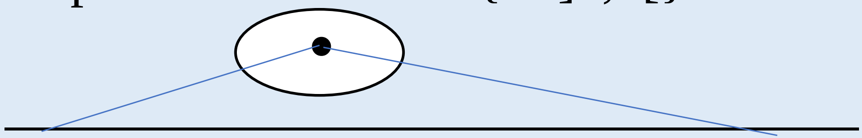
  (i) Wir wissen $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$, $\aleph_0 * \aleph_0 = \aleph_0$. ($\aleph_0 = |\mathbb{N}|$). Der Abstand zwischen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$ muss damit unendlich oft unendlich Groß übersteigen! Immer wenn wir der Liste eine Diagonale anhängen, lässt sich eine neue konstruieren. Man sieht ja auch das für jedes Intervall zwischen zwei natürlichen Zahlen dort wieder überabzählbar unendlich viele reelle Zahlen liegen.

(ii) Die endlichen Worte einer Sprache lassen sich sortieren (z.B. alphabetisch und nach Länge), also aufzählen. Das gilt für jedes finite Zeichensystem. (Wegen Finitheit der Worte gibt es hier kein Diagonalargument.) Die $r \in \mathbb{R}$ lassen sich also nicht individuell bezeichnen! Es gibt *nicht genug Namen*. Reelle Zahlen können somit (als distributive Kollektivität) nicht Zeichen sein. Die Menge der algebraischen Gleichungen insbesondere ist aufzählbar. Damit muss die Menge der Zahlen, denen keine Gleichung entspricht (der ‚transzendenten Zahlen‘) die Menge der ‚algebraischen Zahlen‘ weit übersteigen.

(iii) Wie viele solcher überabzählbaren Unendlichkeiten gibt es nun? Man kann – z.B. geometrisch – zeigen, dass $|\{r \in]0,1[\}| = |\mathbb{R}|$!

Beweis:

Sei _________ eine Linie mit den reellen Punkten $p \in [0,1]$. Diese Linie kann man als Halbkreis darstellen. Projiziert man nun von der unendlichen Geraden aller Punkte $q \in \mathbb{R}$ auf den Mittelpunkt des Kreises, hat man eine Korrespondenz zwischen $\{r \in]0,1[\}$ und $\mathbb{R}$.



(iv) Wie zählt man von der einen Überabzählbarkeit zur nächsten?

- Die letzten beiden Fragen verweisen auf *Cantors Theorem*.
- Dieses liefert die Leiter zur *Cantors Paradies*.

Cantors Theorem

(CT) Die Potenzmenge einer Menge ist echt mächtiger als diese.

• Die Potenzmenge ist die Menge aller Teilmengen. Das *Potenzmengenaxiom* sagt: jede Menge hat eine Potenzmenge.

• Für endliche Menge ist (CT) offensichtlich, da es eine Einermenge zu jedem Element der Menge selbst gibt.

• Gemäß der Dedekindchen Definition der Unendlichkeit könnte man vermuten, dass für unendliche Mengen wieder anderes gilt. Doch dem ist nicht so.

• Standard-Beweis von *Cantors Theorem*:

Wären eine Menge A und ihre Potenzmenge $\wp(A)$ gleichmächtig, muss es eine Korrespondenz f zwischen ihnen geben, d.h. jedem $a \in A$ korrespondiert ein $p \in \wp(A)$. Angenommen es gäbe dieses f. Dann lässt sich eine besondere Teilmenge definieren

$t = \{x \mid x \in A \wedge x \notin f(x)\}$ (die Menge der $x \in A$, die nicht in ihrem Korrespondenzpartner sind).

Diese Mengendefinition erlaubt das *Aussonderungsaxiom*.

Diesem t kann nun f nichts zuordnen! Denn wenn $f(x) = t$, dann

entweder (i) $x \in t$ also $x \notin f(x) = t$, d.h. $x \notin t$ [↯]

oder (ii) $x \notin t$ also $x \in f(x) = t$, d.h. $x \in t$ [↯], also ↯.

Also gibt es f nicht. Da offensichtlich $|\wp(A)| \geq |A|$, $|\wp(A)| > |A|$.

- Zwei Nebenbemerkungen:

  (i) die Definition von t erinnert an die Anti-Diagonale (s.o.) und dasselbe Räsonnement liegt auch anderen Konstruktionen zugrunde (z.B. *Russells Paradox* wenn A = {x| x = x} und *f* = id, wovon Cantor wohl wusste).

  (ii) Die Definition von t und der Beweis verfahren indirekt (gelten also so nicht in Nicht-Standard-Logiken, die hier abweichen).

- Zu unseren Fragen können wir nun zunächst sagen:

(i) (CT) gilt für jede Menge, d.h. wir können per Potenzmengenbildung, welche das Potenzmengenaxiom in ZFC garantiert, zu einer je mächtigeren Unendlichkeit kommen.
Da man Teilmengen als Abbildungen in {0,1} betrachten kann (Element, Nicht-Element) entspricht einer Teilmenge von A eine Funktion f:A $\rightarrow$ {0,1}
d.h. die Potenzmenge von A ist 2^A, der Übergang entspricht somit der Exponentation.
Es gilt also $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$, $2^{\aleph_0} > \aleph_0$

(ii) Da wir dies beliebig wiederholen können, muss es unendlich viele verschiedene große Unendlichkeiten geben. Jede von ihnen ist unendlich viel größer als ihre Vorgängermenge verstanden im Unendlichkeitsbegriff ihrer Vorgängermenge. $\wp(\mathbb{R})$ muss riesig (überabzählbar mehr als $\aleph_1$-überabzählbar) sein.

(iii) Moment: ‚unendlich' in welchem Sinne jetzt? ‚Nur' abzählbar unendlich viele oder überabzählbar unendlich viele?

Tatsächlich gibt uns Z nur abzählbar viele dieser Kardinalitäten: für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine n-fache Iteration von $\wp(\ )$ bzgl. $\mathbb{N}$ als Basis. $\wp(\wp(\wp(\wp(\mathbb{N})))) = \wp^4(\mathbb{N})$.

ZF ergänzt Z u.a. um das *Ersetzungsaxiom*

Der Nachbereich einer Funktion auf einer Menge ist eine Menge

Ist also $\wp^{n}(\mathbb{N})$ die Funktion, die angewendet wird auf die $n \in \mathbb{N}$, hat sie einen Nachbereich als Menge!

Diese Menge ist *noch einmal wesentlich größer* als alle bisher erreichten Unendlichkeiten.

Diese Menge ist eine Menge, d.h. (CT) gilt für sie. Der Prozess startet *wieder*, diesmal bis zur nächsten Zusammenfassung mittels Ersetzungsaxiom.

Jetzt ist kein Ende mehr zu sehen – so scheint es!

Wir sind angekommen in *Cantors Paradies*.

Einblicke in *Cantors Paradies*

- Ordinalzahlen werden geordnet per $\in$.
- Außer ω gibt es überabzählbar viele unendliche Ordinalzahlen *abzählbarer* Art:

$1,2,3 \ldots = \omega$

$1,2,3, \ldots 1 = \omega+1$, danach $\omega+2 \ldots \omega+\omega = 1,2,3 \ldots 1,2,3 \ldots$

$\omega+\omega = \omega*2$, danach $\omega*3 \ldots \omega*\omega = \omega^2$

$\omega^2 \ldots \omega^\omega \ldots \omega^{\omega^{\omega}} \ldots$ (ω-oft exponentiert) $= \varepsilon_0$.

• Alle diese Mengen x $\omega \leq x \leq \varepsilon_0$ sind gleichmächtig! $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$!
Jede überabzählbare Kardinalzahl ist eine ε-Zahl bzw. hat eine ε-Zahl als erste Ordinalzahl dieser Kardinalität. Die ε-Zahlen bilden wieder eine eigene Hierarchie $\varepsilon_\omega = \text{supremum}\{\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots .\}$

• Alle Ordnungen/Ordinalzahlen der Größe $\aleph_0$ werden gesammelt in ω_1. ω_1 ist die Menge aller abzählbaren Ordnungen.

• Keine definierte *arithmetische* Operation auf Ordinalzahlen bringt einen zu höheren Kardinalitäten.
Der Aufstieg in den Kardinalzahlen erfolgt – wie gesehen – über Exponentation.

• ω ist eine ‚Limesordinalzahl' (umfasst alle Ordinalzahlen $o < \omega$):

$\omega = \bigcup o{<}\omega$.

Limesbildung nach *Vereinigungsmengenaxiom*

Jede Menge von Mengen hat eine Menge als Vereinigung.

führt zu höheren Kardinalitäten bei Ordinalzahlen.

• ω_1 ist eine weitere Limesordinalzahl. ω_1 ist die kleinste überabzählbare Ordinalzahl der Größe $\aleph_1$. Es liegt somit keine Kardinalität zwischen ω und ω_1, wie Cantor beweisen konnte. Nicht zu verwechseln mit der Kontinuumshypothese: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

- Wir wissen zwar wegen (CT), dass $2^{\aleph_0} > \aleph_0$, aber *wieviel* größer wissen wir nicht. Wir wissen also nicht, ob nicht zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ andere Kardinalzahlen liegen.

- Ist die Kontinuumshypothese wahr, sind *alle* Kardinalzahlen Ordinalzahlen (Initialordinalzahlen).

- Die Kontinuumshypothese wie die verallgemeinerte Kontinuumshypothese [$2^{\aleph_i} = \aleph_{i+1}$] sind – wie Gödel und Cohen gezeigt haben – *unabhängig* von ZFC (d.h. man kann – muss aber nicht – ZFC um diese Annahme erweitern).

• Die iterative Hierarchie der Kardinalzahlen – per Exponentation/ Teilmengenbildung – ist eine Ordnung, deren Ränge V_i durch Ordinalzahlen nummeriert werden [später mehr zu V].

Nun: $V_\omega \neq V_{\omega+1}$ obwohl $|\omega|=|\omega+1|$

D.h. zwischen zwei Kardinalitäten liegen ungeheuer viele Ordinalzahlen.

Nun: Es gibt *supergroße* Kardinalzahlen/Limesordinalzahlen, so dass $\kappa = \aleph_\kappa$. Eine solche Zahl kommt sehr spät in der Hierarchie.

• Vorausgesetzt werden muss, dass *alle* Kardinalzahlen bezüglich ihrer Kardinalität vergleichbar sind. Dies folgt – ist äquivalent – zum Wohlordnungssatz und wiederum zum Auswahlaxiom (daher ZFC). D.h. selbst $\mathbb{R}$ besitzt eine Wohlordnung.

• ‚Unerreichbare' überabzählbare Kardinalzahlen sind solche, die durch Potenzmengenbildung/Exponentation und Limesbildung per Ersetzungsaxiom *nicht erreicht werden können*, d.h. deren Existenz in ZFC nicht bewiesen werden kann. Sie sind jenseits der anderen Hierarchieebenen.

• Erweiterungen von ZFC *postulieren* solche. Gibt es solche *unerreichbaren Kardinalzahlen*, dienen sie als *Modell* von ZFC, da sie alle kleineren Mengen enthalten, d.h. in diesem Fall ist ZFC erfüllbar/konsistent.
Die Konsistenz von ZFC lässt sich – in Übereinstimmung mit *Gödels Zweitem Unvollständigkeitstheorem* – in dieser *stärkeren* Sprache der Erweiterung von ZFC beweisen.

• Bezüglich solcher unerreichbaren Kardinalzahlen kann man dann allerdings *wieder* den Aufbau einer Hierarchie anvisieren. Das heißt mit ihnen gibt es nicht einfach einen Abschluss der (erweiterten) iterativen Hierarchie!

• $\aleph_0$ ist eine unerreichbare Kardinalzahl, insofern $\aleph_0$ nicht von unten erreicht werden kann. $\aleph_0$ steht schon Z deswegen zur Verfügung – und ist insofern nicht ‚unerreichbar' in Z – weil das *Unendlichkeitsaxiom* die Existenz von $\aleph_0$ *postuliert*.

• Z = Paarbildungs-, Vereinigungsmengen-, Potenzmengen-, Extensionalitäts-, Aussonderungs- und Unendlichkeitsaxiom.
ZF = Z + Fundierungs- und Ersetzungsaxiom.
ZFC = ZF + Auswahlaxiom.

Abschließende Bemerkungen

- Es gibt eine (abstrakte) Mathematik des unendlich Kleinen und des unendlich Großen.
- Auf Infinitesimale kann zugunsten des δ/ε-Kriteriums verzichtet werden.
- *Cantors Paradies* der immer größeren Kardinalitäten in der iterativen Hierarchie ergibt sich aus dem Zusammenspiel der Axiome von ZFC mit der Standard-Logik. Eine Kritik der Unendlichkeit muss somit mit einer Kritik dieser Axiomatik (axiomatischen Ontologie) einsetzen. [Dazu später mehr.]