Teilen Whitehead und Russell eine Philosophie der Mathematik?
Die *Principia Mathematica* als Sackgasse und Brücke

Die Thematik der folgenden Betrachtungen kommt in einer recht bekannten Bemerkung Gödels zum Ausdruck:

> It was only in *Principia Mathematica* that full use was made of the new method [of symbolic logic] for actually deriving large parts of mathematics from a very few logical concepts and axioms. […] It is to be regretted that this first comprehensive and thorough going presentation of a mathematical logic and a derivation of Mathematics from is so greatly lacking in formal precision in the foundations (…) that it presents in this respect a considerable step backwards as compared to Frege.[1]

Zugespitzt kann man die Forschungslage heute so kennzeichnen:
Wer meint, Freges logische Schriften (insbesondere die *Grundgesetze der Arithmetik*) seien gescheitert, hat sie nicht gelesen oder befindet sich nicht auf der Höhe der Debatte.[2]
Wer meint, die *Principia Mathematica* (PM) seien die Grundlage der (formalen) Mathematik, hat sie nicht gelesen oder befindet sich nicht auf der Höhe der Debatte.[3]
Auf der einen Seite muss man sich hüten, aus der Perspektive des nächsten Jahrhunderts schlaumeierisch auf die *PM* hinunter zu schauen, nur um Whiteheads und Russells Konfusionen vorzuführen. Auf der anderen Seite bleibt es zum einen aus systematischer Perspektive richtig, diese Konfusionen zu bemerken und stellt sich erst so die (spannende) Frage, wie im Verhältnis dazu der Einfluss der *PM* zu erklären ist.

Einem (unter Philosophen) landläufigen Vorurteil zur Folge teilte sich die Arbeit bei den PM so auf: Russell hatte eine Philosophie der Mathematik und Whitehead war wesentlich bei der Durchführung des Programms beteiligt.
Dieses Vorurteil scheint in zwei Hinsichten falsch zu sein. Whitehead hatte eine Philosophie der Mathematik, wie sie sich in seinem Buch *An Introduction to Mathematics* (1911) und dem „Mathematics"-Artikel in der *Enzyclopedia Britannica* ausdrückt. Und Russell hatte nicht nur *eine* Philosophie der Mathematik, sondern formulierte in seiner mathematisch-logisch aktiven Zeit (ungefähr zwischen 1900 und 1920) eine Vielzahl von Ansätzen in schneller Reihenfolge. Russell beginnt mit einer pluralistischen Ontologie als Fundament und endet mit

[1] Gödel (1944), S. Russell hat auf diesen Aufsatz nicht reagiert, da er betont, sich seit etwa 1920 nicht mehr mit Logik zu befassen.
[2] Eine prototypische Arbeit zur Rekonstruktion und Verteidigung von Freges *Grundgesetzte der Arithmetik* liefert Heck (2011).
[3] Eine diesbezüglich prototypische Auseinandersetzung mit Russells Philosophie der Mathematik findet sich bei Hylton (2005).

sprachlich-logischen Atomismus. Einige der wichtigen Etappen sind: *The Principles of Mathematics* (1903), Manuskripte zur ‚Substitutionstheorie' (1906) anschließend an „On Denoting" (1905), „Mathematical Logic as Based on a Theory of Types" (1907), die PM 1. Aufl. (1911) mit 90-seitiger allgemeiner Einleitung, *An Introduction to Mathematical Philosophy* (1918) und schließlich die PM 2. Aufl. (192x), mit neuer Einleitung.

Je tiefer man einsteigt, umso mehr ist man gespalten: zwischen der Anerkennung für Russells Hartnäckigkeit schwierige Fragen zu verfolgen, und dem Erstaunen über die fehlende Urteilskraft, die bizarrste Annahmen als grundlegend einbaut (etwa dass logische Partikel als Objekte in abstrakten Propositionen vorkommen, die Behauptung der Existenz aller – auch fiktiver – Gegenstände, variable Gegenstände, die Variablen entsprechen sollen – usw.) und kurz zuvor Offensichtliches dann als absurd brandmarkt.

Die Entwicklung ging selbst für Russell einmal zu schnell: in den PM präsentiert Russell eine Theorie zur Hierarchie propositionaler Funktionen, schreibt direkt anschließend einen französischen Artikel mit einer anderen Theorie, übersetzt diesen zurück und integriert dessen Theorie in die Einleitung der PM, so dass Einleitung und PM unterschiedliche Theorien präsentieren!

Blicken wir auf Whiteheads Philosophie der Mathematik! Im 20ten Jahrhundert unterscheidet man eine Reihe Philosophien der Mathematik, darunter mindestens die folgenden: den Realismus (in der Spielart des Platonismus), den Formalismus, den Intuitionismus, den Konstuktivismus bzw. Operationalismus, den Logizismus, den Realismus (in der Spiel des Strukturalismus), den Nominalismus (als empiristischer Physikalismus) sowie den Nominalismus als Fiktionalismus.

Frege ist sich in den *Grundlagen der Arithmetik* und den *Grundgesetze[n] der Arithmetik* über die Gegensätze im Klaren – Whitehead scheinbar nicht, er vermengt die Standpunkte.

Whitehead ist auf der einen Seite mitverantwortlich für die – oben von Gödel beklagte – formale Inexaktheit der PM. Ein Beispiel: die Erläuterung bzw. Definition von ‚Aussagen' in den PM. Whitehead wollte „the explanation to be a non-committal as possible" (Brief an Russell, 1907)[4]. Er unterstützt Russell in deren Universalitätsanspruch, so dass sogar auch intensionale Kontexte (wie ‚meinen dass') in den Bereich der Aussagen der PM eingeschlossen werden sollen. Whitehead möchte eine Praxis orientiertere Einführung in die Mathematik. Während er gelegentlich die Rolle eines knappen Formalismus betont, trifft man in der IM eher Einschätzungen, wie diese: "The reason for this failure of the science to live up

[4] Briefe werden zitiert nach Monks Russell-Biographie (Monk 1996) sowie dem Russell-Kapitel aus Potter (2000), wo sich aus die Nachweise zu den Archivnummern befinden.

to its reputation is that its fundamental ideas are not explained to the student disentangled from the technical procedure which has been invented to facilitate their exact presentation in particular instances.”

Whitehead verfolgt zugleich verschiedene Definitionen der Mathematik und mischt Philosophien der Mathematik. Während er das Postulat des Logizismus betont: „For the future mathematics is logic…“, gibt es im *Enzyclopedia Britannica*-Artikel auch eindeutig realistische Formulierungen: „Wir müssen wissen, daß √2 existiert, bevor wir beweisen können, daß man sie durch irgendeine Prozedur erreicht“. Im selben Artikel finden sich die beiden folgenden Thesen, die genau der Selbstdefinition des Formalismus entsprechen: „[Mathematik als die] Wissenschaft, die sich mit der logischen Ableitung der Folgerungen aus den allgemeinen Prämissen allen vernunftgemäßen Schließens befaßt“, „Mathematische Sätze sind von dem folgenden Typus: ‚Wenn x, y, z … diese und diese Bedingungen erfüllen, dann gelten für sie diese und diese anderen Bedingungen‘“. In seiner *Universal Algebra* hieß es entsprechend: „The sole concern of mathematics is the inference of proposition from proposition.“ Daneben finden sich im *Enzyclopedia Britannica*-Artikel, bezüglich dessen betont sei, dass es sich nicht um einen historischen Abriss möglicher Philosophien der Mathematik sondern um eine systematische Darstellung handelt, strukturalistische Bemerkungen wie: „In der einen Mathematik sind die Hypothesen gegeben, denen eine Menge von Dingen genügen muß, und es wird eine Gruppe von interessanten Folgerungen gesucht“ und sogar solche, die intuitionistisch klingen: „[J]eder Begriff, der als Grundbegriff aufgefaßt wird, erfordert einen besonderen Akt des Glaubens“.

Über Klassen schreibt Whitehead dort: „Die Kardinalität der Klasse a ist eine bestimmte Klasse, …“ „Die Kardinalzahlen bilden eine Klasse.“ – usw. Whitehead verwendet hier einen naiven Klassenbegriff, zu einer Zeit, in der Russell und die PM offiziell eine ‚no class‘-Theorie vertreten: es gibt keine Klassen, nur als abkürzende Redeweise für propositionale Funktionen. Scheinbar besteht also eine Differenz zwischen Whitehead und Koautor Russell. Aber auch nur scheinbar.

In Wahrheit sind Russell und Whitehead nicht nur nominell Koautoren. Russell betont (z.B. in seinem Whitehead-Nachruf), dass beide zu jeder Zeit alle Entwicklungen der PM geteilt hätten. Tatsächlich standen sie im (unter anderem brieflichen) Austausch – und Whitehead bejubelt jeweils die neuesten Entwicklungen von Russells Philosophie der Mathematik.

Beispiel 1, 1903: Russell ‚eliminiert’ Klassen, es steht im Raum, dass so das Russell-Paradox scheinbar nicht mehr aufzutreten kann. Whitehead jubelt: „Heartiest congratulations Aristoteles secundus“.

Beispiel 2, 1906: Whitehead unterstützt Russells Substitutionstheorie, als Russell sie schon wieder verlassen hat, wobei die Substitutionstheorie – selbst für Russells schnelle Abfolge von Konzeptionen – eine besonders kurze Lebensdauer hatte.
Beispiel 3, 1907: Whitehead schreibt über Russells „Mathematical Logic and Based on the Theory of Types", Russells Analyse der Extensionalität „is beyond all praise. It must be right" (Brief an Russell). Russell sagt selbst kurz darauf über diese Theorie: „There is nothing in it of whose falsehood I feel *convinced*", aber er hat sich schon wieder von ihr verabschiedet.
Manchmal gibt es scheinbare Differenzen (etwa zwischen Russells Ambiguität der Typen und Whiteheads Andeutung einer Unterscheidung zwischen Aussagen in der Theorie und Aussagen über die Theorie [Brief an Russell 29.1.1911]). Hier scheint Whitehead ein Grundproblem der PM klarer zu sehen als Russell (s.u.).
Whitehead scheint hier kaum Schritt halten zu können mit Russells Theorienabfolge.
Ironischerweise widerfährt Russell zu dieser Zeit Ähnliches mit Wittgenstein. Wittgensteins Kritiken beschleunigen die Veränderungen in Russells Auffassungen und führen mit zu den Verschlimmbesserungen der 2. Aufl. der PM.

Eine Zwischenbilanz zu Russell und Whiteheads Philosophie der Mathematik zu Zeiten der PM könnte bis hierhin so aussehen: Das gängige Vorurteil, dass eher Russell die Philosophie und die Richtung der PM bestimmt hat, liegt nicht ganz daneben, denn Whiteheads eigene Ansätze sind sehr schwach entwickelt und eher unklar.
Interessanter scheinen diese beiden Konsequenzen obiger Darlegung: Es zeigt sich, dass eine Fülle teilweise recht merkwürdiger Philosophien der Mathematik mit *ein und demselben Formalismus* (zumindest in der Durchführung der PM) einhergehen. Whitehead scheint hier (und mit IM) das Paradigma des ‚working mathematician' zu bilden (d.h. des Mathematikers, der sich in die Praxis stürzt mit wenig Rücksicht auf die Feinheiten der Grundlagen). Der Typ des ‚working mathematician' spielt auch heute in der Wirklichkeit der Mathematik und selbst des Mathematikstudiums eine größere Rolle als der Typ des formalen Grundlagentheoretikers.

Die PM muss man im Detail ihrer Durchführung als Sackgasse ansehen. Die PM scheitern im Wesentlichen (im Vergleich zur heutigen Standardmengenlehre ZFC oder anderen Systemen wie NBG, das mit einer Unterscheidung von Mengen und ‚echten Klassen' arbeitet) an der Typentheorie.
Der Logizismus in den PM misslingt: entweder (wie in der 1.Aufl.) durch ein dubioses (d.h. sicher nicht rein logisches) ‚Axiom der Reduzierbarkeit' oder (wie in der 2. Aufl.) durch das

Scheitern der Charakterisierung der natürlichen Zahlen (dies besagt *Myhills Theorem*) – im Übrigen im Unterschied zum Erfolg von Freges *Grundgesetze der Arithmetik* (nach Modifikation von ‚Grundgesetz V'), wo eine Herleitung der Peano-Arithmetik gelingt!

Die von der Typentheorie erzwungene Typenunterscheidung zwischen „$x \neq x$" (eine Formel 1.Stufe) „$\phi(\hat{e}) \neq \phi(\hat{e})$" (eine Formel 2. Stufe) und „$\forall\phi(\Psi(\phi) \supset \phi(x) \wedge x \neq x)$" (eine Formel 1.Stufe und dabei 2. Ordnung), wobei alle Formeln eine leere Menge als Extension besitzen, die nun aber – sozusagen, weil sie von unterschiedlich getypten Entitäten leer sind – verschieden zu behandeln sind, führt in der einfachen und der verzweigten Typentheorie zu unendlich vielen Definitionen der „0" und der Zahlen, und damit zur dubiosen Theorie der ‚Ambiguität der Typen' (dass alle diese Zeichen zwar Verschiedenes bedeuten, aber von uns nahezu einheitlich verstanden werden, inklusive eben solcher Ambiguität selbst des logischen Vokabulars wie „nicht", „und", „$\forall$" etc.)

Und es kommt noch schlimmer: Die Typentheorie wird in den PM als Teil des Formalismus eingeführt. Allgemeine Aussagen über Typen sind aber gar nicht innerhalb der Hierarchie möglich, wenn überhaupt. Die Theorie ist mindestens pragmatisch inkonsistent. Vor formaler Inkonsistenz schützt nur die Inexaktheit der PM – eine Ironie der Logikgeschichte gegenüber Frege. Gegeben das Axiom der Reduzierbarkeit sollte sich eigentlich Grellings-Paradox herleiten lassen. Dies kann nur blockiert werden, insofern nicht alle prädikativen Funktionen Namen in der Theorie besitzen. Gegeben Russells 1918 Theorie der propositionalen Funktionen als Ausdrücke sollte das aber so sein!

Nach der 2.Aufl. haben sich Russell und Whitehead nicht mehr mit (der Philosophie der) Mathematik befasst. Russell äußerte schon 1932 Unverständnis für Gödels Unvollständigkeitstheoreme und wollte 1944 nicht mehr auf Gödels Kritik der PM eingehen. Whiteheads drückt dagegen in „Mathematics and the Good"[5] eine späte Einsicht aus:

> [Russell] had discovered a rule of safety. But unfortunately this rule cannot be expressed [...] For the number "three" in each type, itself belongs to different types. Also each type is itself of a distinct type from other types. Thus, according to the rule, the conception of two different types is nonsense, and the conception of two different meanings of the number three is nonsense. It follows that our only way of understanding the rule is nonsense.

Woher kommt dann der gute Ruf der PM? Trotz aller erwähnten Kritiken scheinen die PM einen guten Ruf zu genießen – oder nicht? Hier muss man zwischen ihrem Ruf in der Mathematik und dem in der Philosophie unterscheiden.

---

[5] Dieser Aufsatz findet sich ebenso wie der *Encyclopedia Britannica*-Artikel in dem Bändchen *Philosophie und Mathematik*.

In der Mathematik spielten die PM keine große Rolle. So schreibt B.A. Bernstein in einer Rezension der zweiten Auflage „When one considers the caliber of our authors and the fact that the *Principia* has occupied a prominent place on mathematical shelves for fourteen years, one wonders that the book has influenced mathematics so little.“ Das liegt zum einen daran an den Idiosynkrasien in den Axiomen der PM: „principles based on views opposed to those forced on mathematicians by the work of Peano, Pieri, Hilbert, Veblen, Huntington“ (ebd.). Das liegt zum anderem am Phänomen des ‚working mathematician‘, für den die ungenaue Grundlegung der PM keine Rolle spielt.

In der Philosophie scheinen die PM einen guten Ruf zu genießen. Das liegt nicht daran, dass sie oft gelesen werden. Das liegt eher daran, dass sie zum einen als Brücke dienten, und zum anderen propagandistisch/pädagogisch Frege übertreffen.

Die PM ziehen ihren guten Ruf daraus, dass die bald folgenden exakteren Logikbücher von Church (der u.a. die Redundanz eines aussagenlogischen Axioms der PM zeigt) und Carnap (zusätzlich ein Frege-Schüler), sowie insbesondere die *Grundzüge der theoretischen Logik* der Formalisten Hilbert und Ackerman an sie anknüpfen. Diese Teile der PM sind *unabhängig* von der Typentheorie!

In der Mengenlehre lässt sich die Typentheorie mittels einer Mengenlehre wie ZFC vermeiden: es zeigt sich dort der Vorteil der kumulativen Hierarchie. Das System NBG *klingt* nur nach einer verwandten Typenunterscheidung. (Russell selbst spielte einmal mit der Idee eines entsprechenden ‚Limitation of Size’-Axioms.). Selbst Quines Lob, der bezüglich der PM von einem „Monument des Intellektes“ spricht, steht im Kontext seiner Mengenlehre NF, die gerade über die PM hinweg will. Das Bewusstsein von nötigen Typunterscheidungen, das diese Systeme fundiert, scheint hingegen auch ein positiven Eindruck bezüglich der Rede von einer Typentheorie in den PM hinterlassen zu haben, auch wenn keiner dieser Typentheorie gefolgt ist bzw. sie heute kaum jemand überhaupt noch im Detail kennt.

Letztlich kennen viele die PM vornehmlich durch Gödels Aufsatztitel „Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme, I“.

Jenseits ihrer Philosophie gründet der (indirekte) Erfolg der PM in zwei anderen Faktoren:

1. Sie verwenden eine *Notation* (teils aus der Tradition teils von Peano u.a.), die wesentlich lesbarer ist als Freges Begriffsschrift. Frege konnte nur ein Enthusiast (wie Wittgenstein) oder ein Schüler (wie Carnap) lesen. Notationen dieser Art haben sich durchgesetzt.

2. Die PM bringen den prinzipiellen Nachweis, dass *substantielle Teile* der Mathematik formal-logisch herleitbar sind. Freges Exaktheit und Präzision führt demgegenüber dazu, dass

es nur elementarere Bereiche behandeln kann. Eben das brachte das Eingangszitat Gödels zum Ausdruck. Die PM besaßen insofern eine starke motivierende Wirkung.

Die Verwirrungen in der Philosophie der Mathematik haben dem nicht im Wege gestanden. Sie haben aber sowohl Whitehead als auch Russell an der Philosophie der Mathematik verzweifeln lassen. Während Whitehead sich schließlich doch bei Russell beklagt „I am in a fog as to where you are“ (Brief an Russell 6.1.1908 über die verzweigte Typentheorie) resümiert Russell in *My Philosophical Development*: „The splendid certainty which I had always hoped to find in mathematics was lost in a bewildering maze.

Bibliografie

Gödel, Kurt (1944). “Russell’s Mathematical Logic”, in: Schilpp, P.A. (Hg.) *The Philosophy of Bertrand Russell*. La Salle, S. 123-54.

Heck, Richard (2011). *Frege’s Theorem*. Oxford.

Hylton, Peter (2005). *Propositions, Functions, And Analysis*. Selected Essays on Russell’s Philosophy. Oxford.

Monk, Ray (1996). *Bertrand Russell*. The Spirit of Solitude. London.

Potter, Michael (2000). *Reason’s Nearest Kin*. Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap. Oxford.

Whitehead, Alfred North (1949). *Philosophie und Mathematik*. Vorträge und Essays. Wien.