Teilen Whitehead und Russell eine Philosophie der Mathematik?

Die *Principia Mathematica*
als Sackgasse und Brücke

Manuel Bremer
Universität Düsseldorf
www.mbph.de

Ausrichtung

It was only in *Principia Mathematica* that full use was made of the new method [of symbolic logic] for actually deriving large parts of mathematics from a very few logical concepts and axioms. […]
It is to be regretted that this first comprehensive and thorough going presentation of a mathematical logic and a derivation of Mathematics from logic is so greatly lacking in formal precision in the foundations (…) that it presents in this respect a considerable step backwards as compared to Frege.

(Kurt Gödel)

Ausrichtung (2)

- Wer meint, Freges logische Schriften (insbesondere die *Grundgesetze der Arithmetik*) sei gescheitert, hat sie nicht gelesen oder befindet sich nicht auf der Höhe der Debatte.

- Wer meint, die *Principia Mathematica* seien die Grundlage der (formalen) Mathematik, hat sie nicht gelesen oder befindet sich nicht auf der Höhe der Debatte.

Weitere Vorbemerkung

- Auf der einen Seite muss man sich hüten, aus der Perspektive des nächsten Jahrhunderts schlaumeierisch auf die *PM* hinunter zu schauen, nur um Whiteheads und Russells Konfusionen vorzuführen.

- Auf der anderen Seite bleibt es (1) aus systematischer Perspektive richtig, diese Konfusionen zu bemerken und (2) stellt sich erst so die (spannende) Frage, wie im Verhältnis dazu der Einfluss der *PM* zu erklären ist.

Ein Vorurteil über die Philosophie der PM

- Einem (unter Philosophen) landläufigen Vorurteil zur Folge teilte sich die Arbeit bei den PM so auf: Russell hatte eine Philosophie der Mathematik und Whitehead war wesentlich bei der Durchführung des Programms beteiligt.
- Dieses Vorurteil scheint in zwei Hinsichten falsch zu sein:

  1. Whitehead hatte [zusätzlich zu vorherigen Schriften] zur Zeit der PM eine Philosophie der Mathematik
     - *An Introduction to Mathematics* (1911)
     - „Mathematics“-Artikel in der *Enzyclopedia Britannica*
  2. Russell hatte nicht nur *eine* Philosophie der Mathematik während der Entstehung der PM

Russells Entwicklung

- In seiner logisch aktiven Phase entwickelt Russell rasant eine Reihe von Philosophien der Mathematik
- Russell beginnt mit einer pluralistischen Ontologie als Fundament und endet mit sprachlich-logischem Atomismus
  - *The Principles of Mathematics* (1903)
  - Manuskripte zur „Substitutionstheorie“ (1906) anschließend an „On Denoting“ (1905) sowie eine Reihe weiterer Aufsätze und Manuskripte
  - „Mathematical Logic as Based on a Theory of Types“ (1907)
  - PM 1. Aufl. (1911) mit 90-seitiger allgemeiner Einleitung
  - *An Introduction to Mathematical Philosophy* (1918)
  - PM 2. Aufl. (192x), mit neuer Einleitung

Russells Entwicklung (2)

- Je tiefer man einsteigt, um so mehr ist man gespalten: zwischen der Anerkennung für Russells Hartnäckigkeit schwierige Fragen zu verfolgen, und dem Erstaunen über die fehlende Urteilskraft, die bizarrste Annahmen als grundlegend einbaut [logische Partikel als Objekte in Propositionen, Existenz aller Gegenstände, variable Gegenstände …] und kurz zuvor Offensichtliches dann als absurd brandmarkt.
- Die Entwicklung ging selbst für Russell einmal zu schnell: in den PM präsentiert Russell eine Theorie zur Hierarchie propositionaler Funktionen, schreibt direkt anschließend einen frz. Artikel mit einer *anderen* Theorie, übersetzt diesen zurück und integriert dessen Theorie in die Einleitung der PM, so dass Einleitung und PM unterschiedliche Theorien präsentieren!

Philosophien der Mathematik

- Im 20ten Jahrhundert unterscheidet man eine Reihe Philosophien der Mathematik, mindestens:
  - Realismus (in der Spielart des Platonismus)
  - Formalismus
  - Intuitionismus
  - Konstuktivismus/Operationalismus
  - Logizismus
  - Realismus (in der Spiel des Strukturalismus)
  - Nominalismus (als empiristischer Physikalismus)
  - Nominalismus als Fiktionalismus
- Frege ist sich in GLA und GG über die Gegensätze im Klaren – Whitehead scheinbar nicht.

Konfusionen in/um Whiteheads Philosophie der Mathematik

- Whitehead ist auf der einen Seite mitverantwortlich für die formale Inexaktheit der PM.
- Beispiel: Aussagen in den PM. Whitehead wollte „the explanation to be a non-committal as possible“ (Brief an Russell, 1907). Er unterstützt Russell in deren Universalitätsanspruch, so dass auch intensionale Kontexte („meinen dass“) eingeschlossen werden sollen.
- "The reason for this failure of the science to live up to ist reputation is that its fundamental ideas are not explained to the student disentangled from the technical procedure which has been invented to facilitate their exact presentation in particular instances." (IM), aber auch Betonung der Rolle eines knappen Formalismus (ebd).

Konfusionen in/um Whiteheads Philosophie der Mathematik (2)

- Whitehead verfolgt verschiedene Definitionen der Mathematik und mischt Philosophien der Mathematik.
- Logizismus: „For the future mathematics is logic…“ (SPTCS).
- Realismus: „Wir müssen wissen, daß √2 existiert, bevor wir beweisen können, daß man sie durch irgendeine Prozedur erreicht“ (M)
- Formalismus: „[Mathematik als die] Wissenschaft, die sich mit der logischen Ableitung der Folgerungen aus den allgemeinen Prämissen allen vernunftgemäßen Schließens befaßt“, „Mathematische Sätze sind von dem folgenden Typus: ‚Wenn x, y, z … diese und diese Bedingungen erfüllen, dann gelten für sie diese und diese anderen Bedingungen‘“(M)

Konfusionen in/um Whiteheads Philosophie der Mathematik (3)

„The sole concern of mathematics is the inference of proposition from proposition.“ (UA) [früher Formalismus]

- Strukturalismus: „In der einen Mathematik sind die Hypothesen gegeben, denen eine Menge von Dingen genügen muß, und es wird eine Gruppe von interessanten Folgerungen gesucht“ (M) [klarer MG]
- Intuitionismus (?): „[J]eder Begriff, der als Grundbegriff aufgefaßt wird, erfordert einen besonderen Akt des Glaubens“ (M)

Whitehead über Klassen

- „Die Kardinalität der Klasse a ist eine bestimmte Klasse, …“. „Die Kardinalzahlen bilden eine Klasse.“(M) – usw. Whitehead verwendet hier einen naiven Klassenbegriff.
- Zu einer Zeit, in der Russell und die PM offiziell eine ‚no class‘-Theorie vertreten: es gibt keine Klassen, nur als abkürzende Redeweise für propositionale Funktionen.
- Scheinbar besteht eine Differenz zwischen Whitehead und Co-Autor Russell.
- Aber auch nur scheinbar.

Whitehead und Russell als Co-Autoren

- Russell betont (im Whitehead-Nachruf), dass beide zu jeder Zeit alle Entwicklungen der PM geteilt hätten.
- Tatsächlich standen sie im (u.a. brieflichen) Austausch – und Whitehead bejubelt jeweils die neuesten Entwicklungen von Russells Philosophie der Mathematik.
- Beispiel 1: 1903 Russell eliminiert Klassen – kein Paradox mehr? Whitehead „Heartiest congratulations Aristoteles secundus".
- Beispiel 2: 1906 Whitehead unterstützt Russells Substitutionstheorie, als der sie schon wieder verlassen hat, „but it was extremely short-lived, even by Russell's hectic standards of theory revision" (Michael Potter).

Whitehead und Russell als Co-Autoren (2)

- Beispiel 3: 1907 Whitehead über Russell „Mathematical Logic and Based on the Theory of Types“. Russells Analyse der Extensionalität „is beyond all praise. It must be right“ (Brief an Russell). Russell 1908 über diese Theorie: „There is nothing in it of whose falsehood I feel *convinced*“.
- Manchmal gibt es scheinbare Differenzen (etwa zwischen Russells Ambiguität der Typen und Whiteheads Andeutung einer Unterscheidung zwischen Aussagen in der Theorie und Aussagen über die Theorie [Brief an Russell 29.1.1911]). Hier scheint Whitehead ein Grundproblem der PM klarer zu sehen als Russell (s.u.).

Eine Ironie der Geschichte

- Whitehead scheint hier kaum Schritt halten zu können mit Russells Theorienabfolge.
- Ironischerweise widerfährt Russell zu dieser Zeit Ähnliches mit Wittgenstein. Wittgensteins Kritiken beschleunigen die Veränderungen in Russells Auffassungen und führen mit zu den Verschlimmbesserungen der 2. Aufl. der PM.

Mögliche Zwischenbilanz

- Das gängige Vorurteil, dass eher Russell die Philosophie und die Richtung der PM bestimmt hat, liegt nicht ganz daneben, denn Whiteheads eigene Ansätze sind sehr schwach entwickelt und eher unklar.
- Interessanter:
  1. Es zeigt sich, dass eine Fülle teilweise recht merkwürdiger Philosophien der Mathematik mit *ein und demselben Formalismus* (zumindest in der Durchführung der PM) einhergehen.
  2. Whitehead scheint hier (und mit IM) das Paradigma des ‚working mathematician' zu bilden.

Die PM als Sackgasse

- Die PM scheitern (im Vergleich zu ZFC, NBG…) an der Typentheorie.
- Der Logizismus in den PM misslingt: entweder (1.Aufl.) ein dubioses Axiom der Reduzierbarkeit oder (2. Aufl.) das Scheitern der Charakterisierung der natürlichen Zahlen (*Myhills Theorem*). [Im Unterschied zum Erfolg von Freges GG nach Modifikation von Grundgesetz V].
- Die Typenunterscheidung zwischen „$x \neq x$“ (1.Stufe) „$\phi(\hat{e}) \neq \phi(\hat{e})$“ (2. Stufe) und „$\forall\phi(\Psi(\phi) \supset \phi(x) \wedge x \neq x)$“ (1.Stufe, 2. Ordnung“) führt zu unendlich vielen Definitionen der „0“ und der Zahlen, und damit zur dubiosen Theorie der Ambiguität der Typen“ (inklusive „nicht“, „und“, „$\forall$“ etc.)

Die PM als Sackgasse (2)

- Die Typentheorie wird in den PM als Teil des Formalismus eingeführt. Allgemeine Aussagen über Typen sind aber nicht innerhalb der Hierarchie möglich, wenn überhaupt. Die Theorie ist mindestens pragmatisch inkonsistent.
- Vor formaler Inkonsistenz schützt nur die Inexaktheit der PM – eine Ironie der Logikgeschichte gegenüber Frege. Gegeben das Axiom der Reduzierbarkeit sollte sich eigentlich [Irving Copis Argument] Grellings Paradox herleiten lassen. Dies kann nur blockiert werden, wenn nicht alle prädikativen Funktionen Namen in der Theorie besitzen. Gegeben Russells 1918 Theorie der propositionalen Funktionen als Ausdrücke sollte das aber so sein!

Späte Einsicht

- Nach der 2.Aufl. haben sich Russell und Whitehead nicht mehr mit (der Philosophie der) Mathematik befasst.
- Russell wollte 1944 nicht mehr auf Gödels Kritik eingehen.
- Whitehead drückt in „Mathematics and the Good“ (1941) zumindest eine späte Einsicht aus:
  „[Russell] had discovered a rule of safety. But unfortunately this rule cannot be expressed [...] For the number "three" in each type, itself belongs to different types. Also each type is itself of a distinct type from other types. Thus, according to the rule, the conception of two different types is nonsense, and the conception of two different meanings of the number three is nonsense. It follows that our only way of understanding the rule is nonsense“ (MG)

Woher kommt der gute Ruf der PM?

- Trotz alledem scheinen die PM einen guten Ruf zu genießen – oder nicht?
- Hier muss man zwischen ihrem Ruf in der Mathematik und dem in der Philosophie unterscheiden.

Missachtung in der Mathematik?

- In der Mathematik spielten die PM keine große Rolle.
- Aus einer Rezension der 2. Aufl. „When one considers the caliber of our authors and the fact that the *Principia* has occupied a prominent place on mathematical shelves for fourteen years, one wonders that the book has influenced mathematics so little“ (B. A. Bernstein)
- Das liegt zum einen daran an den Idiosynkrasien der PM: „principles based on views opposed to those forced on mathematicians by the work of Peano, Pieri, Hilbert, Veblen, Huntington“ (ebd.) [ähnlich schon bzgl. UA]
- Das liegt zum anderem am Phänomen des ‚working mathematician‘

Beachtung in der Philosophie?

- In der Philosophie scheinen die PM eine guten Ruf zu genießen.
- Das liegt nicht daran, dass sie oft gelesen werden.
- Das liegt eher daran, dass sie

  1. als Brücke dienten

  2. propagandistisch/pädagogisch Frege übertreffen

Die PM als Brücke

- Die PM ziehen ihren guten Ruf daraus, dass die bald folgenden exakteren Logikbücher von Church (der u.a. die Redundanz eines aussagenlogischen Axioms der PM zeigt) und Carnap (zusätzlich Frege-Schüler), sowie insbesondere den Formalisten Hilbert/Ackerman an sie anknüpfen. Diese Teile der PM sind *unabhängig* von der Typentheorie!
- In der Mengenlehre lässt sich die Typentheorie mittels ZFC vermeiden: Vorteil der kumulativen Hierarchie. NBG *klingt* nach einer verwandten Typen-unterscheidung [Russell selbst spielte einmal mit der Idee eines Limitation of Size Axioms]
- Quines Lob („Monument des Intellektes“) steht im Kontext seiner NF, die gerade über die PM hinweg wollen.
- Gödels Aufsatztitel „Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme, I“

Didaktische Erfolgsgründe der PM

Jenseits ihrer Philosophie gründet der (indirekte) Erfolg der PM in zwei anderen Faktoren:

1. Sie verwenden eine *Notation* (teils aus der Tradition teils von Peano u.a.), die wesentlich lesbarer ist als Freges Begriffsschrift. Frege konnte nur ein Enthusiast (wie Wittgenstein) oder ein Schüler (wie Carnap) lesen.

2. Die PM bringen den prinzipiellen Nachweis, dass *substantielle Teile* der Mathematik formal-logisch herleitbar sind. Freges Exaktheit und Präsizion führt demgegenüber dazu, dass er nur elementarere Bereiche behandeln kann. [vgl. das Eingangszitat Gödels]

Gemeinsames Schlusswort?

- „I am in a fog as to where you are“

  Whitehead an Russell 6.1.1908 über
  die (verzweigte) Typentheorie.

- „The splendid certainty which I had always hoped to find in mathematics was lost in a bewildering maze.“

  Russell später über die PM-Zeit
  (aus *My Philosophical Development*)