

Logik

Logik ist heute ein interdisziplinäres und – wie die Fülle von Forschungspublikationen und Journalen zeigt – aktives Feld der Forschung. Die Logik ist dabei bezogen nicht nur auf die Mathematik oder die Philosophie, sondern auch auf die (formale) Sprachwissenschaft und insbesondere auf die Informatik, die Kognitionswissenschaften und die Theorie künstlicher Intelligenz. Deshalb zeigt sich innerhalb der Logik auch genauer betrachtet eine Fülle von Systemen und Ausrichtungen logischer Forschungen, nur ein Teil dieser Systeme und Fragen bezieht sich auf die (Grundlagen der) Mathematik, nur ein Teil auf Theorien formaler Sprachen und Automaten, und entsprechend für andere an der Logik interessierte Wissenschaften. Im Mittelpunkt der Forschung stehen sowohl innerlogische Fragen, welche zunächst nur die Eigenschaften bestimmter formaler Systeme betreffen, als auch Fragen der Anwendung solcher Systeme, insbesondere in der Modellierung technischer Systeme oder sprachlicher Strukturen. Im kognitionswissenschaftlichen Kontext wird des Weiteren gefragt, inwiefern die Logik, obwohl sie sich bezüglich der Geltung logischer Gesetze traditionell nicht an der Psychologie der Denkgewohnheiten orientiert, psychisch real ist (d.h. inwiefern es im Geist/Gehirn entsprechende Regelmodule gibt).

Das zentrale Thema der Logik ist die Gültigkeit des Folgerns. Es sollen solche Schlüsse, und damit auch Argumentationen (in den Wissenschaften im Allgemeinen) oder Zustandsübergänge (in der Automatentheorie), ausgezeichnet werden, bei denen aus einer (eventuell leeren) Menge von Prämissen eine Konklusion folgt. Die Logik interessiert sich nicht für die Wahrheit der Prämissen und insofern nicht dafür, ob uns die Folgerung zur Annahme der Konklusion zwingt, sondern nur für den Zusammenhang zwischen den Prämissen und der Konklusion. Dieser soll zwingend in dem Sinne sein, dass im Falle, dass die Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr sein muss. Gültige Schlüsse müssen wahrheitserhaltend sein. Als Theorie des gültigen Schließens analysiert die Logik die \rightarrow Form der Prämissen und der Konklusion und bedient sich eines \rightarrow Formalismus. Die Logik ist formal, indem sie sich nicht für einzelne gültige Schlüsse oder eine Sammlung derselben interessiert, sondern für Schlüsse, die ihrer Form nach gültig sind. Ein Schluss ist der Form nach gültig, wenn er sich in mindestens eine gültige Schlussform bringen lässt. (Jedes Argument lässt sich leicht in eine Form bringen, in der es nicht gültig ist.) Eine Schlussform ist gültig genau dann, wenn sich immer bei einheitlicher Einsetzung von Wörtern der entsprechenden grammatischen Kategorie für die Platzhalter in der Schlussform ein gültiger Schluss ergibt. Beispielsweise ist die Form „wenn p so q, p, also: q“ gültig, da bei einheitlicher Einsetzung (wobei „p“ an beiden Stellen seines Vorkommens durch denselben Aussagesatz ersetzt wird) für die beiden Schemabuchstaben „p“ und „q“ durch Aussagesätze sich ein gültiger Schluss ergibt. „wenn...so---“ wird dabei als Ausdruck des logischen Vokabulars, der nicht ersetzt werden darf, betrachtet. Welche Ausdrücke zum logischen Vokabular gezählt werden, hängt davon ab, wie viel logische Struktur aufgedeckt werden soll. So betrachtet die Aussagenlogik nur solche Junktoren wie „wenn...so---“ oder „...und---“, die Aussagen verknüpfen, während die Prädikatenlogik die Binnenstruktur der Aussagen betrachtet, und etwa eine logische Form wie die folgende zuweist: „Für einige x gilt: x liest oder x sieht_fern“. Je nach Tiefe der logischen Analyse wird eine Form aufgedeckt. Und die Überprüfung eines Schlusses oder Argumentes auf seine Gültigkeit verlangt seine Formalisierung. Es bedarf dazu einer Unterscheidung des in diesem Kontext relevanten logischen Vokabulars, der damit zusammenhängenden syntaktischen Kategorisierung des nichtlogischen Vokabulars und der Auszeichnung der auf der so

aufgedeckten Ebene der logischen Form gültigen Übergänge von Prämissen zu einer Konklusion. Gültigkeit ist in der modernen Logik eine Frage der logischen Form. Ein Schluss ist gültig nur, weil und sofern er sich in eine gültige Form bringen lässt (d.h. formale Gültigkeit ist notwendig und hinreichend für Gültigkeit). Das logische Gerüst eines Schlusses und das dort verwendete logische Vokabular zeigt nicht nur, dass der Schluss gültig ist, sondern auch warum. So ergibt sich eine Theorie der formalen Systeme, wobei diese nicht mehr allein zur exakten Modellierung gültigen Schließens eingesetzt werden, sondern ebenso zur exakten Darstellung von Wissensbeständen und zur Begriffsexplikation, insofern die Axiomatisierung eines Begriffes (wie der Notwendigkeit) als dessen exakte Explikation angesehen werden kann. Deshalb ist die moderne Logik symbolische Logik.

Logische Wahrheit ist nur von sekundärem Interesse gegenüber logischer Folgerung. Denn logische Wahrheiten lassen sich definieren als solche Konklusionen, die aus einer leeren Prämissenmenge folgen. Sie sind gültig aufgrund ihrer eigenen logischen Form. Üblicherweise werden die Axiome als logisch wahr angesehen. Und die Umformungsregeln eines System sollen die logische Wahrheit von den Axiomen auf abgeleitete Theorem übertragen. In der elementaren Logik, für die das Deduktionstheorem gilt, entspricht jeder gültigen Folgerung auch eine logische Wahrheit. Es gibt indessen auch Logiken, in denen es gar keine logischen Wahrheiten aber dennoch gültige logische Folgerungen gibt. Für die Logik entscheidender ist also die Vererbung von Wahrheit von den Prämissen auf eine Konklusion in gültigen Schlüssen denn das Auffinden einzelner Aussagen, die immer wahr sind. Weil man nicht logisch wahren Prämissen eben zunächst nicht ansieht, was sie enthalten, bedarf es der logischen Analyse von Argumenten und Schlüssen. Zur Ordnung eines Wissensbestandes kann es dienen, einige Annahmen als Axiome auszuzeichnen, um dann mittels entsprechender Schlussregeln die anderen für wahr gehaltenen Aussagen als Theorem aus ihnen abzuleiten. Aus formaler Perspektive kommt es dabei nicht darauf an, ob die Axiome/Grundsätze wahr sind. Die formale Logik beruft sich nicht auf eine am Anfang stehende Einsicht in die Gültigkeit bestimmter Wahrheiten, es reicht zunächst die Konvention, bestimmte Sätze als Axiome anzusehen. Nur relativ zu einer gegebenen oder entworfenen \rightarrow Semantik für das formale System ergibt sich dann Gültigkeit und logische Wahrheit.

Im Unterschied zur traditionellen Logik ist die moderne Logik eine durchgängig formale Logik, in deren Zentrum der \rightarrow Formalismus steht. Traditionell wurde nicht allein der Begriff „Logik“ in einem sehr weiten Sinne verwendet, der allgemeine erkenntnistheoretische Untersuchungen einschloss, sondern auch die Logik selbst war eine nur begrenzt (in der Aristotelischen Syllogistik) systematische Anordnung gültiger Schlussformen. Da eine Theorie formaler Sprachen und Systeme fehlte, blieben Lücken (d.h. selbst einfache Schlüsse vielen zwischen die Maschen der bekannten Schlussformen) und metalogische Untersuchungen waren nur im Ansatz möglich. Die Sicherheit, welche eine Formalisierung eines Schlusses mit sich bringen soll, hat erst dann größtmögliches Ausmaß, wenn man außerdem von den eingesetzten Mitteln der Formalisierung (dem Kalkül) weiß (d.h. bewiesen hat), dass sie korrekt sind. Mittels der Unterscheidung von Syntax (den Formregeln und den Regeln des Ableitens) und \rightarrow Semantik (der intendierten Interpretation der Schemata) wird in der metalogischen Untersuchung eines Kalküls versucht zu zeigen, dass der Kalkül korrekt ist (d.h. dass bei Anwendung seiner Regeln auf Wahrheiten auch nur Wahrheiten erzeugt werden). Wünschenswert ist auch, dass der Kalkül deduktionsvollständig ist (d.h. dass alle Folgerungen, die sich auf dieser Ebene der logischen Analyse aus einer Menge von Prämissen ziehen lassen, auch mittels der Regeln

des Kalküls erreicht werden können). Die elementare Aussagen- und Prädikatenlogik sind in diesem Sinne korrekt und vollständig. Idealerweise hätte man auch gerne, dass man auf mechanische Weise entscheiden kann, ob eine Konklusion aus einer Menge von Prämissen folgt. Bei der (Standard-)Aussagenlogik ist dies möglich, bei der Prädikatenlogik hingegen nicht. Deshalb muss man bei der Prädikatenlogik Ableitungsregeln aufstellen und geschickt einsetzen. Stärkere Logiksysteme (wie die Prädikatenlogik Zweiter Stufe) sind oft nicht einmal deduktionsvollständig oder überhaupt axiomatisierbar. Damit werden sie allerdings nicht wertlos, da sie neben der Modellierung entsprechender Strukturen auch wünschenswerte Eigenschaften besitzen (können), über welche die elementare Prädikatenlogik nicht verfügt (z.B. einen mathematischen Bereich wie die Analysis eindeutig charakterisieren zu können). Schließlich hat die elementare Prädikatenlogik auch noch nachweislich die Eigenschaft der Kompaktheit: Wenn eine Konklusion aus einer Menge von Prämissen folgt, folgt sie aus einer endlichen Teilmenge dieser Prämissen. Kompaktheit scheint eine Bedingung dafür zu sein, dass Wesen mit endlichem Wissen die möglichen Prämissen zu einer Konklusion finden können.

Die moderne Logik begann dermaßen im Zuge der Entwicklung formaler Systeme im 19. Jahrhundert. Freges *Begriffsschrift* von 1879 enthält eine erste Formalisierung der elementaren Prädikatenlogik. Die Unterscheidung zwischen Syntax und Semantik und die entsprechenden Adäquatheitsuntersuchungen entwickelten sich zu Beginn des 20. Jahrhunderts. 1920 wies Post die Adäquatheit und Entscheidbarkeit der elementaren Aussagenlogik nach. 1930 bewies Gödel die deduktive Vollständigkeit der elementaren Prädikatenlogik. Auch die ersten limitativen metalogischen Resultate werden in dieser Zeit erzielt. Skolem und Löwenheim zeigten 1915/1923 die Unfähigkeit der Prädikatenlogik Erster Stufe, überabzählbar unendliche Modelle zu erzwingen. Church bewies 1936 die Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik Erster Stufe. Gödels Unvollständigkeitstheoreme von 1931 zeigten die Negationsunvollständigkeit hinreichend ausdrucksstarker konsistenter formaler Systeme sowie die Nichtaxiomatisierbarkeit der Prädikatenlogik Zweiter Stufe. Während die traditionelle Logik über Jahrhunderte mehr oder weniger im Stillstand verharrte und viele Probleme noch nicht einmal sehen konnte, brachte die Entwicklung formaler Logiken einen rasant wachsenden neuen Wissenschaftsbereich mit sich.

Die Logik gliedert sich in eine Reihe von Bereichen. Traditionell wurde schon unterschieden zwischen der deduktiven Logik (Logik im engeren Sinne) und der induktiven Logik (Theorien der Wahrscheinlichkeit und der Bestätigung). In der Didaktik und dem Lehren der Logik wird unterschieden zwischen dem Ansatz der informellen Logik, der versucht die Schlüssigkeit von Argumenten mit möglichst wenig Formalismen zu prüfen, und dem gängigen Umgehen mit den Kalkülen. Von besonderem Interesse für die Mathematik sind die Mengenlehre und Kategorientheorie, von besonderem Interesse für die Informatik die Theorie der Berechenbarkeit und der Automaten.

Auch in der formalen Logik (im engeren Sinne) selbst kann man verschiedene Bereiche unterscheiden. Dort finden sich zum einen Erweiterungen der elementaren Logik. Dies sind z.B. die verschiedensten Modallogiken (d.h. Logiken die Begriffe wie „notwendig“ oder „geboten“ erfassen). Es gibt hier nicht nur eine Logik des Begriffes „notwendig“ sondern eine Vielzahl (unterschieden z.B. dadurch ob das Axiom gilt, dass dasjenige, was notwendig ist, notwendigerweise notwendig ist). Die damit sich ergebenden Fragen betreffen damit zum einen, ob es nicht mehrere zu trennende Begriffe von Notwendigkeit (etwa naturgesetzlicher Notwendigkeit im Unterschied zu logischer Notwendigkeit) gibt, die jeweils durch einen bestimmten Kalkül charakterisiert werden können. Zum anderen müssen den verschiedenen

Axiomen auch verschiedene Strukturen in der Semantik (dem intendierten Verständnis) der betreffenden Systeme entsprechen. So hat sich gezeigt, dass eine Semantik, die Aussagen relativ zu „möglichen Welten“ bewertet und die verschiedene Zugänglichkeitsrelationen zwischen diesen möglichen Welten einführt (z.B. ob jede Welt alle anderen möglichen Welten sehen kann oder ob auf jeden Zustand ein weiterer Zustand folgt) den verschiedenen Systemen korrespondiert. Insbesondere die temporale Modallogik erweist sich auch als sehr fruchtbar für die Modellierung technischer Übergangssysteme. Ob sich eine bestimmte neue Bereichslogik entwickelt, hängt davon ab, ob man bestimmte Ausdrücke (wie „bisher“, „ab jetzt“ etc.) als hinreichend formal und inhaltsinvariant ansieht, um sie zum logischen Vokabular eines entsprechenden Systems zu zählen.

Neben den Erweiterungen der elementaren Standardlogik gibt es aber auch das wachsende Feld der Nichtstandardlogiken („devianten“ bzw. „nicht-klassischen“ Logiken aus der Perspektive der Standardlogik). Hierzu zählen z.B. mehrwertige Logiken und Logiken (wie die Relevante Logiken oder Intuitionistische Logiken), welche die Gültigkeit einiger Regeln der Standardlogik (wie den Disjunktiven Syllogismus oder die allgemeine Kontraposition) bestreiten. Die Auseinandersetzung zwischen der Standardlogik (der zweiwertigen Logik, die sich in der üblichen Prädikatenlogik Erster Stufe ausdrückt) und den Nicht-Standardlogiken betrifft letztlich die Frage, wie der intuitive Folgerungsbegriff oder der Folgerungsbegriff, wie er sich in natürlichen Sprachen oder üblichen wissenschaftlichen Theorien findet, am angemessensten zu formalisieren ist. Es scheint so zu sein, dass sich die Standardlogik zunächst am Idealfall der Mathematik orientiert hat, gegenüber dem aber vielfältige Modifikationen nötig sind, wenn es um nicht-mathematische Kontexte geht.

Als Teil der Behandlung der formalen Systeme aber auch als Feld eigenständiger Fragestellungen ist die Metalogik wichtig. Einige ihrer Resultate (wie Gödels Unvollständigkeitstheoreme) sind in das Allgemeinwissen eingegangen. Die Metalogik handelt auf der einen Seite von (formalen) Sprachen und Systeme im Allgemeinen. Metalogische Resultate (wie solcher der Komplexitätstheorie) haben unmittelbare Auswirkungen auf die Umsetzbarkeit/Implementieren bestimmter logischer Modellierungen. Die Komplexität mechanischer Entscheidungsverfahren etwa wirft die Frage auf, ob der menschliche Geist überhaupt auf diese Weise, gegeben seine Raum- und Zeitgrenzen, vorgehen kann. Wichtig für die Metalogik ist die heute übliche Unterscheidung von Syntax (dem formalen System im engeren Sinne) und Semantik (der Interpretation des Systems), welche üblicherweise modelltheoretisch (d.h. mittels der Mengenlehre) ausgedrückt wird. In der frühen formalen Logik (bei Frege und Russell/Whitehead) spielte diese Unterscheidung noch keine Rolle und daher ist u.a. mit Tarskis Arbeiten zur Semantik und Wahrheitstheorie formaler Systeme eine neue Qualität metalogischer Forschung möglich geworden. Man fragt heute nicht nur nach der zu einem System passenden Semantik, sondern man kann sich auch anlässlich von semantischen Strukturen (etwa solchen mit einer Mehrzahl von Wahrheitswerten) fragen, welches formale System diese Strukturen nun deduktiv charakterisieren könnte.

Eine zentrale Hypothese, welche eine Brücke zwischen formalen System und Sprechen und Denken im Allgemeinen schlägt ist die *Church-Turing-These*, welche besagt, dass der intuitive Begriff der Berechenbarkeit vom exakten Begriff der Turing-Berechenbarkeit erfasst wird. Verschiedene andere Explikationen der Berechenbarkeit haben sich als zur Turing-Berechenbarkeit äquivalent erwiesen. Insofern scheint es so zu sein, dass insofern etwas überhaupt in klare (algorithmische) Regeln gefasst werden kann (sei dies ein Problemlöseverfahren oder eine Grammatik), es von einer Turingmaschine berechnet bzw.

erzeugt werden kann. Dies würde erlauben, Ergebnisse über die Eigenschaften formaler Systeme auf menschliche Sprachen (und das Denken insofern es sich sprachlich ausdrückt bzw. eine analoge Struktur hat) zu übertragen. Insofern würde die moderne Logik Kants Diktum, die Logik sei die „Wissenschaft von den notwendigen Gesetzen des Verstandes und der Vernunft überhaupt“ [1] über- und eingeholt.

Für die Sprachwissenschaften ist die Logik aus zwei Gründen von Interesse. Zum einen dienen formale Systeme und Sprachen als Muster für Erzeugungssysteme (von Wortmengen) und zur Modellierung grammatischer Strukturen und Ableitungen. So setzt die *Chomsky-Hierarchie* Typen von Automaten/Erzeugungssystemen zu Typen von Sprachen in Beziehung. Zum anderen enthält *Montagues These* (dass es keinen prinzipiellen Unterschied zwischen formalen und natürlichen Sprachen gibt) die doppelte Perspektive, Resultate aus der Metatheorie formalen Sprachen auf natürliche Sprachen zu übertragen und die Option, natürliche Sprachen als formale Sprachen zu betrachten. So modelliert die Kategorialgrammatik mittels semantischer Typen die Semantik natürlicher Sprachen und die Kompositionalität von natürlichsprachlichen Sätzen.

Für die Geisteswissenschaften im Allgemeinen und die Philosophie im Besonderen ist die Logik in mehreren Hinsichten von Interesse. Als Propädeutik des wissenschaftlichen Denkens im allgemeinen und des (philosophischen) Argumentierens im Besonderen, ist die Logik die Schule des folgerichtigen Denkens. Traditionell wird die Logik, etwa bei Frege, insofern auch als eine normative Wissenschaft betrachtet: „Wie die Ethik kann man auch die Logik eine normative Wissenschaft nennen. Wie muß ich denken, um das Ziel der Wahrheit zu erreichen?“ [2]. Gemeinhin haben wir schon eine logische Kompetenz, die im Folgern an den Tag gelegt wird, aber über die eigens selten nachgedacht wird. Die hier verwendeten Regeln – genauer: die zu verwendenden Regeln, an denen sich die tatsächlich verwendeten Regeln orientieren sollen – werden in der logischen Propädeutik explizit gemacht, um ausdrücklich unter Verweis auf mögliche Anwendungssituationen gemerkt werden zu können und um Fehler zu erkennen, mit denen die alltägliche Praxis des Schließens durchwachsen ist. Der Einsatz der logischen Propädeutik ist dabei um so nötiger, je weniger bestimmte logische Begriffe (wie „es ist notwendig, dass...“) im Alltag verwendet werden. Logik im Sinne der logischen Propädeutik ist derart ein zeitweises ausdrückliches Üben dessen, was man sonst gemeinhin ohne eigens zu überlegen tut. In der logischen Propädeutik kommt es deshalb nicht darauf an, alle möglichen Argumente bis in alle Details zu formalisieren. Es soll eine Fähigkeit entwickelt werden. In der Auseinandersetzung mit argumentativen Texten, als der meist verwendeten Form der Diskussion unter Philosophen oder geisteswissenschaftlichem Theoretikern, ist es, des Weiteren, hilfreich, die verwendeten Argumente auf ihre Korrektheit zu überprüfen. Unsere Meinungen, dass es sich um korrekte Argumente handelt, können wir bewähren, indem wir die Argumente in eine logisch korrekte Form bringen. Auf der anderen Seite zeigt sich, dass sich hinter scheinbar einfachen argumentativen Passagen eine Menge logischer Struktur verbergen kann. Es wird also – je nachdem wie genau man die Analyse durchführen will und wie viel Symbolismus man dabei verwendet – einiges an logischem Wissen verlangt. Ein solches Vorgehen empfiehlt sich daher insbesondere bei strittigen oder besonders wichtigen Argumenten. In einem solchen Fall zeigt die diagnostische Anwendung der Logik, ob man dem Autor zumindest keinen Argumentationsfehler vorwerfen kann. Eine Kritik wird sich dann nur als eine Kritik an den Prämissen ergeben können. Besonders interessant ist die diagnostische Anwendung der Logik natürlich beim Aufspüren von Fehlschlüssen. Der Nutzen der diagnostischen Anwendung der Logik liegt dann darin, unter der Annahme, dass es sich um ein

Argument handelt, Prämissen zu ergänzen, die der Autor machen müsste, damit es sich um ein logisch korrektes Argument handeln würde. Solche „impliziten Prämissen“, die in einer Textpassage nicht eigens erwähnt werden, können harmlose aber auch interessante nicht ausdrücklich benannte Hintergrundannahmen des betreffenden Autors zum Gegenstand haben. In dieser diagnostischen Funktion zeigt sich Logik nicht bloß als Symbolspielerei sondern als methodisches Werkzeug in der argumentativen philosophischen Auseinandersetzung. Sofern wir, drittens, als Logiker das alltägliche Reden untersuchen, geht es darum, die Verwendungsweise einiger Fundamentalbegriffe (wie „folgt aus“ oder „ist wahr“) zu rekonstruieren. Logik ist hier Teil der Erläuterung der Grundnormen unseres Denkens. Selbst wenn die entsprechenden Formalismen zu einer alltäglichen Anwendung sehr oder vielen zu schwierig sind, so haben sie eine erkenntnistheoretische Funktion. Die logische Erläuterung solcher Grundbegriffe und Grundnormen des Denkens rechtfertigt uns in unserer Erkenntnispraxis. Metalogische Resultate sind dann Resultate bezüglich unserer Erkenntnis- bzw. Denkgrenzen. Darin unterscheiden sie sich von diesbezüglichen philosophischen Spekulationen. Zu diesen Resultaten zählen u.a.: die undefinierbarkeit des Wahrheitsprädikates einer konsistenten Sprache in dieser selbst (Tarski) oder die Negationsunvollständigkeit hinreichend ausdrucksstarker konsistenter formaler Systeme (Gödel). Diese Resultate sagen etwas Grundlegendes über unser Vermögen zu rasonieren und zu erkennen. Zu diesen Resultaten führt z.B. eine Auseinandersetzung um den Begriff des formalen Systems. Selbst wenn die entsprechenden Formalismen zu einer alltäglichen Anwendung sehr oder vielen zu schwierig sind, so haben sie eine erkenntnistheoretische Funktion.

Manuel Bremer

Anmerkungen:

[1] I. Kant, Logik, Königsberg 1800, S.5.

[2] G. Frege, Schriften zur Logik und Sprachphilosophie, Aus dem Nachlaß, Hamburg 1978, S.38.

Literatur

G. Boolos / R. Jeffrey, Computability and Logic, Cambridge ³1989.

M. Bremer, An Introduction to Paraconsistent Logics, Frankfurt a.M. 2005.

I. Copi, Einführung in die Logik, München 1998.

W. Essler / R. Martinez, Grundzüge der Logik, Band I, Das logische Schließen, Frankfurt a.M. ⁴1991.

L. Goble (Hg.) The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Oxford 2001.

S. Haack, Philosophy of Logics, Cambridge 1978.

F. von Kutschera / A. Breitkopf, Einführung in die moderne Logik, Freiburg⁶1992.

G. Priest, An Introduction to Non-Classical Logic, Cambridge 2001.

S. Read, Philosophie der Logik, Eine Einführung, Hamburg 1997.