Form/Formalismus

Traditionell wird mit Form das Abstrakte gemeint, dass dem konkreten Inhalt/der Materie gegenüber steht. In diesem Sinne ist die Röte die Form, welche verschiedene rote Gegenstände besitzen. (Formen sind platonische Ideen.) Die Form ist allgemein, die Materie individuell. Form und Materie sind, bei Kant, Reflexionsbegriffe: Die Form ist immer die Form einer Materie, und jede Materie hat eine Form.

Heute hingegen wird Form, insbesondere in der → Logik eher im Sinne des Schematischen verstanden, von dem Konkretes eine Instanz sein kann. Verschiedene Sätze wie „Peter geht“ und „Maria hustet“ kommen in ihren prädikatenlogischen Form „F(a)“ überein.

Die Logik weist bei ihrer Analyse der Gültigkeit von Schlüssen Sätzen eine logische Form zu (relativ zu einer bestimmten Tiefe der logischen Analyse). Die Form wird schematisch angegeben und verwendet Schemabuchstaben für Ausdrücke einer bestimmten syntaktischen Kategorie (wie Eigennamen oder einstelligen Prädikatoren). Zwei Aussagen A und B sind formgleich in diesem Sinne wenn A sich durch einheitliche Substitution von Ausdrücken einer syntaktischen Kategorie durch andere Ausdrücke derselben Kategorie in B überführen lässt, und umgekehrt. Gültigkeit ist eine Sache der logischen Form. In diesem Sinne spricht man von „formaler Gültigkeit“ im Unterschied zur (bloß faktischen) Wahrheit.

Grundlegend für die → Logik ist daher die Theorie der formalen Systeme. Ein formales System (ein Formalismus) dient dabei der hervorhebenden Unterscheidung von logischem Vokabular, das die logischen Eigenschaften eines Satzes determiniert, und inhaltlichen Bestandteilen, von deren Konkretion zugunsten von Schemata abgesehen wird.

Die Verwendung von Formalismen kennzeichnet den Charakter der formalen Wissenschaften (insbesondere der Mathematik, aber auch der theoretischen Informatik sowie Teilen der Philosophie und Sprachwissenschaften). Die formalen Wissenschaften handeln von den formalen Strukturen der Wirklichkeit (etwa im Falle einer formalen Theorie der Relationen, der Mereologie, Topologie usw.) oder von Repräsentationen der Wirklichkeit (etwa im Falle der Modellierung von Wissenssystemen und deren Zustandsveränderungen). Die Vorbedingung für die Behandlung eines Themas wird daher die Formalisierung der entsprechenden Fragestellung bzw. die Formalisierung der zu prüfenden Theorien. Formalisierung ist der Vorgang der Überführung (natürlichsprachlicher) Sätze in Formeln eines Kalküls. Dabei muss darauf geachtet werden, dass allein durch die Formalisierung nicht intuitiv inakzeptable Konsequenzen beweisbar werden (Inkorrektheit der Formalisierung) oder vormals schließbare Konsequenzen nicht abgeleitet werden können (Unvollständigkeit der Formalisierung).

Ein formales System zeichnet sich durch seine exakte Definition aus. Formale Systeme sind künstliche Sprachen mit exakten Definitionen ihrer Bildungsregeln und jeweiligen Herleitungsbeziehung. Oft werden sie auf eine formale Semantik/Interpretation bezogen. Dabei handelt es sich in der Regel um modelltheoretische (d.h. mengentheoretische) Strukturen. Kalküle in der Logik sind solche formalen Systeme. Programmiersprachen in der Informatik bilden ebenfalls eine Klasse der künstlichen formalen Systeme. Grammatiken in der (formalen) Sprachwissenschaft lassen sich als formale Systeme formulieren.

Es seien hier zwei Beispiele betrachtet, wobei das erste die (formale) Sprachwissenschaft und Theorie der Automaten betrifft und das zweite einen einfachen formallogischen Kalkül präsentiert.

<u>Beispiel 1.</u> Einer bestimmten Art von formaler Sprache, die oft als eine Menge von Worten angegeben wird, entspricht eine bestimmte Art von Automat bzw. Erzeugungssystem. Diese

Korrespondenz zeigt uns, dass bestimmte sprachliche Strukturen unter Umstände sehr spezielle Anforderungen an die Grammatiken/Erzeugungssysteme bzw. an die Automaten stellen, die sie generieren sollen. Wir lernen vor allem, dass Automaten einer bestimmten Bauart bestimmte Sprachen nicht generieren können. Haben wir daher den Typus einer Sprache bestimmt, können wir zurückschließen, welche Sorte von Automat vorhanden sein muss, um sie zu erzeugen. Gelegentlich werden bestimmte Wortmengen auch deswegen „formale“ Sprachen genannt, weil man sich ausschließlich für ihre Erzeugungsmechanismen und nie für ihre Interpretation interessiert. Wir betrachten hier eine solche Sprache und das ihr zugehörige Erzeugungssystem. Es sei Σ ein Alphabet, Σ^n sei das n-fache Cartesische Produkt über Σ. Dann ist $\alpha \in \Sigma^n$ ein Wort der Länge n. Σ^* sei die Vereinigung aller Worte bezüglich irgendwelcher Längen n. Σ^* ist die zu Σ gehörende Wortmenge. Eine Teilmenge L $\subset \Sigma^*$ ist eine formale Sprache über Σ. Um sie zu erzeugen wird eine Grammatik betrachtet. Grundlegend ist dabei eine Menge von Substitutionsregeln (A,B), wobei A und B Wörter sind. Eine Regel kann angewendet werden auf ein Wort A', falls die linke Seite der Regel ein Teilwort von A' ist, das dann durch die rechte Seite der Regel ersetzt wird. Beispielsweise erzeugt die Regel (A,b) aus dem Wort XAY das Wort XbY. Zur Formulierung der Regeln werden außer den eigentlichen Symbolen, die später in den Wörter der erzeugten Sprache auftreten, auch Hilfszeichen verwendet, die in Zwischenschritten einer Ableitung auftreten. Jede linke Seite einer Regel muss mindestens ein solches Hilfssymbol aufweisen. Um die Erzeugung zu starten, wird das Startsymbol S verwendet. Eine Grammatik/ein Erzeugungssystem ist dann ein Tupel $<V, \Sigma, S, P>$ wobei V das Vokabular zusammengesetzt aus dem Alphabet Σ und den Hilfssymbolen ist, S ist das Startsymbol und P die Menge der Regeln. Regeln haben auf der linken Seite nur Hilfssymbole, auf der rechte Seite Ausdrücke aus dem Alphabet. In einer kontextfreien Sprache haben alle Regeln die Form (A,a), wobei „A“ ein Hilfssymbol und $a \in \Sigma$ ist. Eine Ableitungsrelation lässt sich definieren als der transitive und reflexive Abschluss der Regelmenge; deren Resultat ist die von der Grammatik definierte Sprache (d.h. die Menge all der Worte, die sich ausgehend vom Startsymbol durch eine Verkettung von Anwendungen irgendwelcher Regeln erzeugen lassen). Als Beispiel für eine kontextfreie Sprache sei folgende Grammatik gegeben: $<\{S,a,b\},\{a,b\},S,\{S \rightarrow ab,\ S \rightarrow aSb\}>$. Die Grammatik enthält also die beiden Regeln $S \rightarrow ab$ und $S \rightarrow aSb$. Durch mehrmaliges Anwenden der zweiten Regel wird als Sprache erzeugbar $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ (d.h. alle Wörter, in denen auf n-viele „a“ n-viele „b“ folgen). Interessant ist nun zum einen, dass sich beweisen lässt, dass zur Erzeugung einer Sprache dieses Typs (kontextfreie Sprache) ein Kellerautomat ausreicht (d.h. ein Automat, der Zugriff nur auf das zuletzt gespeicherte Element seines Speichers hat). Zum anderen kann man zeigen dass sich die Sprache $\{a^n b^n c^n | n \in \mathbb{N}\}$ nicht auf diese Weise erzeugen lässt; es handelt sich hier um eine kontextsensitive Sprache (die sie erzeugende Grammatik besitzt Regeln, bei denen das Hilfssymbol, das mit der Regel ersetzt wird, in einen Kontext von Symbolen eingebettet ist). Zur Erzeugung einer Sprache dieses Typs bedarf es einer speicherbeschränkten Turingmaschine (d.h. einer Maschine, die beliebigen Zugriff auf einen allerdings beschränkten Speicher besitzt). Solche abstrakten Untersuchungen werden relevant, wenn man feststellt, dass Programmier- oder natürliche Sprache kontextsensitiv sind, also eine bestimmte Mindestkomplexität der erzeugenden Systeme benötigen. Außerdem lassen sich für die Theorie der Automaten und Erzeugungssysteme allgemeine Metatheoreme beweisen, die so Bestandteil einer allgemeinen Sprachtheorie sind. So ist es z.B. im Allgemeinen nicht mechanisch entscheidbar, ob ein Wort zu einer bestimmten Sprache gehört, sondern nur für Sprachen unterhalb einer bestimmten Komplexität: für kontextsensitive Sprachen (zu denen u.U. die Grammatiken natürlicher Sprachen zu zählen sind) ist dies noch entscheidbar, für beliebige formale Sprachen wie Logikkalküle, insofern deren Theoreme als die erzeugten Wörter betrachtet werden können, nicht.

Beispiel 2. Ein Kalkül der Modallogik erweitert die elementare Aussagenlogik um den Ausdruck „□“ für „es ist notwendig, dass...“. In einfachster Weise kann man die modale Aussagenlogik S5 wie folgt definieren: Die Sprache besitzt einen Zeichenvorrat. Dieser besteht aus den elementaren Aussagebuchstaben p, p’, p’’... sowie den Junktoren: ¬, □, ⊃ sowie den Klammern: (,). Die Formregeln bestimmen, was eine wohlgeformte Formel dieses Kalküls ist: (F1) jeder elementare Aussagenbuchstabe ist eine Formel, (F2) ist A eine Formel, so sind ¬(A) und □(A) Formeln, (F3) sind A und B Formeln, so ist (A ⊃ B) eine Formel, (F4) nichts sonst ist eine Formel. „A“ und „B“ dienen hier als metasprachliche Variablen, um über unbestimmte objektsprachliche Formeln zu reden. Bezüglich der Klammern legt man noch fest, dass äußere Klammern wegfallen können, etwa in „(p ⊃ p’)“, und das Klammern gemäß der steigenden Bindungsstärke der Junktoren ¬/□, ⊃ wegfallen können (also „¬p ⊃ p’“ statt „(¬(p) ⊃ p’)“). Bestimmte Formeln werden als Axiome festgesetzt, nämlich: (A1) p ⊃ (p’ ⊃ p), (A2) (p ⊃ p’) ⊃ ((p’’ ⊃ p) ⊃ (p’’ ⊃ p’)), (A3) (¬p ⊃ ¬p’) ⊃ (p’ ⊃ p), (A4) □p ⊃ p, (A5) □(p ⊃ p’) ⊃ (□p ⊃ □p’), (A6) ¬□¬p ⊃ □¬□¬p. Um aus diesen Axiomen abzuleiten, werden zum einen drei Regeln festgesetzt: (R1) Sind A und A⊃B ableitbar, so ist B ableitbar, (R2) Ist A ableitbar, so ist □A ableitbar, (R3) Ist A ableitbar, so ist B ableitbar, insofern B dadurch aus A entsteht, dass mindestens ein elementarer Aussagenbuchstabe durch eine Formel einheitlich ersetzt wurde. Zum zweiten muss man sagen, was eine Ableitung ist: eine Ableitung von B aus $A_1...A_n$ liegt genau dann vor, wenn es eine endliche Sequenz von wohlgeformten Formeln $B_1...B_m$ gibt, so dass $m \geq n$, B ist B_m, und für $1 \leq i \leq m$ gilt entweder B_i ist ein Axiom oder B_i ergibt sich aus einer Regelanwendung aus mindestens einer vorausgehenden Formel B_j. Mit diesen Festlegungen lassen sich nun bestimmte Formeln als ableitbare Theoreme auszeichnen, z.B. □(p ⊃ ¬p’) ⊃ (p’ ⊃ p). Dieser Syntax wird nun eine modelltheoretische Semantik zugeordnet. Ein Modell M ist ein Tupel <W,*V*>, wobei W eine Menge von möglichen Welten ist und *V* eine Interpretationsfunktion. *V* ordnet jedem elementaren Aussagebuchstaben relativ zu einer möglichen Welt entweder den Wert 1 (für „ist wahr“) oder 0 (für „ist falsch“) zu. Dann kann man als Wahrheitsbedingungen für Formeln dieses Kalküls festsetzen: (S1) In einem Modell M_i macht eine Welt w_i eine Elementaraussage A genau dann wahr, wenn $V(A, w_i)=1$, (S2) In einem Modell M_i macht eine Welt w_i eine Aussage der Form ¬A genau dann, wahr wenn w_i nicht A wahr macht, (S3) In einem Modell M_i macht eine Welt w_i eine Aussage der Form A ⊃ B genau dann wahr, wenn w_i entweder nicht A wahr macht oder wenn w_i B wahr macht, (S4) In einem Modell M_i macht eine Welt w_i eine Aussage der Form □A wahr genau dann, wenn alle Welten w_j in diesem Modell die Aussage A wahr machen. Diese rekursiven semantischen Regeln legen so z.B. fest, dass Notwendigkeit in diesem System als Wahrheit in allen möglichen Welten verstanden wird. Zusätzlich definiert man: (V1) Ein Modell M_i macht eine Aussage wahr genau dann, wenn alle Welten in diesem Modell die Aussage wahr machen, (V2) Eine Aussage ist gültig genau dann, wenn sie in allen Modellen wahr ist. Aus der Perspektive der Logik interessieren dann genau die gültigen Aussagen bzw. die gültigen Folgerungen. Metalogisch kann man sich fragen, ob die oben angegebene Syntax relativ zu der angegebenen Semantik adäquat ist, d.h. ob die Ableitungsrelation korrekt ist (d.h. nur gültige Aussagen abzuleiten gestattet) und ob sie vollständig ist (d.h. dass sie alle gültige Aussagen abzuleiten in der Lage ist). Die Korrektheit zeigt man dadurch, dass man zuerst zeigt, dass alle Axiome gültig sind, und dann zeigt,

dass die Umformungsregeln die Gültigkeit vererben. Beispielsweise ist (A4) gültig, da bei Wahrheit des Vordersatzes gemäß (S4) der Hintersatz gar nicht falsch sein kann. Die Regel (R1) vererbt Gültigkeit, da bei Ungültigkeit von B und Gültigkeit von A die Aussage A ⊃ B in der Welt falsch sein muss, in der B falsch ist – usw. Vollständigkeit kann man mittels sogenannter kanonischer Modelle beweisen. Außerdem kann man im vorliegenden Fall auch die Entscheidbarkeit von S5 beweisen (da eine falsche Aussage immer in einem endlichen Modell falsch ist). Damit liefert S5 eine mechanisierbare Prozedur, um modallogische Folgerungen zu identifizieren. Das rein mechanische Manipulieren des Formalismus gestattet also das Gewinnen von Theoremen.
In der Philosophie der Mathematik versteht man unter Formalismus die Richtung, welche die Mathematik dadurch und nur dadurch definieren will, dass sie eine Formalwissenschaft ist (d.h. dass in ihr Resultate in und bezüglich von formalen Systemen bewiesen werden) – und sonst nichts. Eine Variante des Formalismus sieht Mathematik als von den Worten (insbesondere den Zahlworten) handelnd. Dies erscheint jedoch nicht nur unplausibel, sondern scheitert schon an der Interpretation des Gleichheitszeichens „4+5=9“ muss re-interpretiert werden, da die Worttypen auf den beiden Seiten der Gleichung ja verschieden und nicht identisch sind. Außerdem gibt es spätestens mit den reellen Zahlen Bereiche der Mathematik, in denen mehr Objekte vorkommen als es Worte irgendeiner Sprache mit endlich langen Worten geben kann. Eine zweite Variante sieht Mathematik als das Spielen mit den Regeln formaler Systeme an. Auch dies erscheint unplausibel, da dieses „Spielen“ beachtliche außermathematische Anwendungen in den Wissenschaften findet. Bloße Spiele könnten diese Anwendbarkeit kaum besitzen. Hilbert hat demgegenüber eine Variante des Formalismus angedeutet, die zwar nicht grundsätzlich ablehnt, dass die Mathematik von etwas außer Zeichen handelt, dennoch aber das Entscheidende an der Mathematik in ihrem deduktiven Vorgehen anhand von Formalismen sieht. Die Axiome seien beliebig stipulierbar, worauf es ankäme sei, dass das mit ihnen gegebene formale System konsistent sei. Konsistenzbeweise gewinnen so eine neue Wichtigkeit. Alle konsistenten Systeme sind berechtigt. Was die Mathematik zeigt ist, dass bestimmte Aussagen ableitbar sind, akzeptiert man bestimmte Axiome. Der Gehalt einer mathematische Aussage bestimmt sich aus ihrer Rolle im deduktiven System, zu dem sie gehört (d.h. woraus sie folgt und was mittels ihrer gefolgert werden kann). Diese Auffassung nennt man entsprechend auch „Deduktivismus“. Mathematisches Wissen bildet so eine Variante von logischem Wissen. Da nun formale Systeme vorliegen und diese selbst aufgrund ihrer exakten Definiertheit Gegenstand metaformaler Untersuchungen werden können, eröffnet sich das Feld der Metamathematik. Die Metamathematik im Hilbertschen Sinne befasst sich mit Eigenschaften formaler Systeme, wie insbesondere deren Konsistenz. Hilberts Programm bestand nun darin, mittels metamathematischer Resultate die Sicherheit der Mathematik einzuholen. Sein besonderes Anliegen war, dies mit finiten Mitteln zu tun (d.h. mittels des Einsatzes von Schemabuchstaben und begrenzter Quantifikation alleine, anstelle der üblichen universellen Quantifikation über beliebige/unendliche Bereiche). In einer solchen finitistischen Mathematik wären alle Probleme mechanisch entscheidbar, da begrenzte Quantifikation nur die Betrachtung eine endlichen Menge möglicher Gegenbeispiele verlangt. Neben dem ungeklärten Status von Negationen beschränkter Quantoren scheiterte Hilberts Programm aber schließlich mit Gödels Unvollständigkeitstheoremen. Für eingeschränkte Bereiche (wie die Theorie natürlicher Zahlen) bleibt dieser Formalismus aber eine Option. In Currys Variante des Deduktivismus fällt die Beschränkung auf den Finitismus fort. Deshalb kann Curry die gesamt Mathematik als Theorie formaler Systeme ansehen: Die Mathematik sagt,

was in welchen System woraus folgt, wobei man sich nicht festlegen muss, ob und worüber diese Systeme denn selbst reden. Da aufgrund Gödels zweitem Unvollständigkeitstheorem Konsistenzbeweise von konsistenten metamathematischen Systemen nicht über sich selbst geliefert werden können, muss man sich bei der Auswahl eines mathematischen Systems jedoch entweder auf eine (problematische) Intuition bezüglich dessen Gültigkeit verlassen oder auf die gelingenden Anwendungen dieses Systeme verweisen. Wieso die Anwendungen gelingen, kann aber der mathematische Realist besser erklären als der Formalist. Deshalb hat sich ein allgemeiner Formalismus in der Mathematik nicht durchgesetzt.

Betrachtet man die rasante Entwicklung der modernen Logik und der durch sie angestoßenen Theorie der Berechenbarkeit mit der daraus hervorgehenden Entwicklung der Computerisierung, dann kann man in der Entwicklung der Theorie formaler Systeme eine der entscheidenden wissenschaftlichen Entwicklungen des späten 19. und 20. Jahrhunderts sehen.

Manuel Bremer

Literatur

P. Bachmann, Mathematische Grundlagen der Informatik, Berlin 1992.

S. Shapiro, Thinking about mathematics, The philosophy of mathematics, Oxford 2000.

R. Smullyan, Theory of Formal Systems, Princeton 1961.