# Die Syntax der Dyadic Deontic Logic (DDL)[1]

**Grund-Alphabet**
abzählbar viele Schemabuchstaben: p,q,r...; der einstellige Operator: $\perp$
die zweistelligen Operatoren: $\supset$, O( / ‘); Klammern: (,)
**Form-Regeln bezüglich des Grund-Alphabets**

1. Jeder Schemabuchstabe ist eine wohlgeformte Formel (wff).
2. $\perp$ ist eine wff.
3. Sind $\alpha$ und $\beta$ wff, so ist $(\alpha\supset\beta)$ eine wff.
4. Sind $\alpha$ und $\beta$ wff, so ist auch $O(\alpha/\beta)$ eine wff.
5. Nichts sonst ist eine wff.

**Definitorisch eingeführte Symbole**

D1. $\neg p \Leftrightarrow p \supset \perp$
D2. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \supset q)$
D3. $(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
D4. $(p \equiv q) \Leftrightarrow ((p\supset q)\wedge(q\supset p))$
D5. $P(p/q) \Leftrightarrow \neg O(\neg p/q)$
D6. $F(p/q) \Leftrightarrow O(\neg p/q)$
D7. $T \Leftrightarrow \neg \perp$
D8. $O(p) \Leftrightarrow O(p/T)$

**Klammerregelegung**: Die Bindungsstärke nimmt ab: O() [F(),P()],¬,∧,∨,→,↔. Op := O(p)
**Axiomenschemata**: Alle Aussagen der folgenden Formen sind Axiome:

A1. $\alpha$, wenn $\alpha$ eine aussagenlogische Tautologie ist. [Einschluß der Aussagenlogik]
A2. $\neg O(\perp/\alpha)$ [„ought“ implies „can“: Kants Dictum]
A3. $O(\alpha/\beta) \supset (\beta \supset O(\alpha/T))$ [Abtrennung der Normbedingung][2]
A4. $O(\alpha/\beta) \wedge O(\alpha/\gamma) \supset O(\alpha/\beta\vee\gamma)$ [Axiom „des Dilemmas“][3]

**Umformungsregeln**

**Theoreme**. $\alpha$ ist ein Theorem, wenn $\alpha$ ein Axiom ist oder aus einer n-maligen Anwendung der Umformungsregeln aus einer oder mehreren Theoremen gewonnen wurde. Nichts sonst ist ein Theorem.

R1. Von der These $\alpha$, kann zur These $\beta$ übergegangen werden, indem $\beta$ dadurch aus $\alpha$ entsteht, daß für mindestens einen Schemabuchstaben in $\alpha$ eine wff einheitlich eingesetzt wird. [Einheitliche Einsetzung]

R2. $\vdash(\alpha \supset \beta), \vdash\alpha \rightarrow \vdash\beta$ [Modus Ponens]

R3. $\vdash(\alpha\equiv\beta) \rightarrow \vdash(\gamma\equiv\delta)$, wobei $\delta$ dadurch aus $\gamma$ entsteht, das an einer oder mehreren Stellen $\alpha$ duch $\beta$ ersetzt wird. [Substitution von Äquivalenten]

R4. $\vdash(\alpha \wedge \beta \supset \gamma) \rightarrow \vdash(O(\alpha/\delta) \wedge O(\beta/\delta) \supset O(\gamma/\delta))$ [Einführung von Obligation][4]

---

1 Nach Al-Hibris System **S** in: *Deontic Logic*. Washington. 1978. Kap.5

2 Wenn die Umkehrung von A3. gelten würde (nämlich „$(p \supset O(q/T)) \supset O(q/p)$“ wäre die Darstellung bedingter Gebote in DDL äquivalent zu ihrer Darstellung mittels der materialen Implikation. Und das soll ja gerade nicht sein!

3 Die Umkehrung gilt nicht, da sich bei deren Voraussetzung (wie in Wrights *New System of Deontic Logic)* unerwünschte Konsequenzen oder gar Gegenbeispiele zu einem solchen Axiom ergeben (vgl. Al-Hibri, S.79f.)

**Abgeleitete Umformungsregeln**

DR1. $|-(\alpha \supset \beta) \rightarrow |-(O(\alpha/\gamma) \supset O(\beta/\gamma))$
[Konsequenzen eines Gebotenen sind geboten]

DR2. $|-(\alpha \equiv \beta) \rightarrow |-(O(\alpha/\gamma) \equiv O(\beta/\gamma))$
$|-(\alpha \equiv \beta) \rightarrow |-(O(\gamma/\alpha) \equiv O(\gamma/\beta))$
[Spezifikationen von R3. bezüglich der dyadischen Operatoren]

DR3. $|-F(\alpha/\gamma)\,,\, |-(\beta \supset \alpha) \rightarrow |-F(\beta/\gamma)$
[Antecedenzien von Verbotenem sind verboten][5]

**Einige wichtige Theoreme**

T1. $O(p/q) \wedge O(r/q) \supset O(p\wedge r/q)$ [Zusammenfassen von Geboten]

T2. $O(p\wedge r/q) \supset O(p/q) \wedge O(r/q)$ [Trennen von Geboten][6]

T3. $O(p\vee q/r) \wedge O(\neg q/r) \supset O(p/r)$ [Gebotsbezogener disjunktiver Syllogismus]

T4. $\neg(O(p/q) \wedge O(\neg p/q))$ [Konsistenz des Gebotenseins][7]

T5. $O(p/q) \wedge (O(p) \supset O(r)) \supset (q \supset O(r))$
[wenn p unter q als gebotene Folge r hat, so ist unter q der Umstand r geboten]

T6. $O(p/q\vee r) \wedge O(p/\neg q\vee r) \supset O(p/r)$

T7. $O(p/q) \supset P(p/q)$ [Was geboten ist, ist erlaubt]

T8. $P(p\vee q/r) \supset P(p/r) \vee P(q/r)$

T9. $(p \supset (F(\neg r/q) \wedge (\neg p\vee q))) \supset O(r)$

T10. $\neg P(p\vee q/r) \supset (r \supset O(\neg p) \wedge O(\neg q))$

T11. $F(\neg p\wedge\neg q/r) \wedge \neg P(\neg p\wedge\neg q/s) \wedge O(\neg q/r\vee s) \supset O(p/r\vee s)$

# Die Semantik der Dyadic Deontic Logic

Ein DDL-Modell ist ein Triple m=<W,R>. Wir sagen, daß eine Aussage relativ zu einem Modell und einem Element $w_i$ aus W wahr ist: $\langle m,w_i\rangle|=\alpha$
Gültig (d.h. logisch wahr) sind genau die Aussagen, die in jedem Modell zu jedem Index wahr sind: $|=\alpha$. $\alpha$ kann auch nur wahr relativ zu einem Modell sein: $\langle m\rangle|=\alpha$.
Der deontisch relevante Aspekt eines DDL-Modells ist R.
R ist eine Funktion über den Bereich $W\times P(W)\times P(W)$, wobei W die Menge der möglichen Welten (also die Menge aller möglichen Zustände der Welt) sein soll. Bezüglich der n-vielen

---

[4]In DDL gibt es also eine Regel, die SDL Axiom A3. (Gebotensein des Tautologischen) nahekommt, ohne eine direkte Einfürhung des Gebotenseins zu sein. Denn mit R4. erreicht man nicht „O(T/p)“.

[5]Die Regel DR1. und DR3. entsprechen den abgeleiteten Regeln in SDL.

[6]Diese beiden Theoreme entsprechen dem SDL Axiom A2.

[7]Dieses Theorem entspricht dem SDL Axiom A1. DDL kann also alles das über das Gebotensein sagen, was SDL sagte - mit dem Unterschied, daß die Theorem nun Gebote enthalten, die auf eine Bedingung bezogen werden. Logische Umformungen und Theoremherleitungen beziehen sich aber (mit Ausnahme der Einführung des „Dilemmas“ durch A4., wo der Gebote Sachverhalt indessen derselbe sein muß, und die Substitution von logischen Äquivalenten) *nicht auf die Bedingungen der Gebote*. Insbesondere gibt es keine „logische Bewegung“ von Aussage(teilen) über das „/“ in „O( / ‘)“. Die Umkehrung der deontischen Abtrennung soll ja nicht gelten (siehe die Anmerkung dazu). Kein Theorem ist etwa „$O(p\wedge q/r) \supset O(p/q\wedge r)$“, obwohl es intutiv verstanden werden könnte als die logische Wahrheit, daß bei halber Realisierung eines Gebotes die andere Hälfte noch zu tun ist, denn „q“ müßte hier über das „/“ „exportiert“ werden. Bezüglich dieser Intuition gilt T2., das ähnlich gedeutet werden kann, da die rechte Seite des Konditionals nur wahr wird, wenn über die Erfüllung der einen Hälfte des Gebotes auch die andere getan wird.

atomaren Schemabuchstaben der Sprache DDL gibt es $2^n$ viele Verteilungsmöglichkeiten der Wahrheitswerte (analog den Zeilen einer Wahrheitstafel). Diese Möglichkeiten bilden die atomaren Zustandsbeschreibungen. Eine mögliche Welt ist eine maximal konsistente Menge von Aussagen, in der alle Aussagen enthalten sind, die sich nach den DDL-Regeln konsistent der Menge von atomaren Aussagen, die den Ausgangspunkt einer jeweiligen möglichen Welt definieren (eine atomare Zustandsbeschreibung bilden) beifügen kann. (Beispielsweise kann man einer Aussagenmenge, in der sich $\alpha$ befindet, $\alpha\vee\gamma$ hinzufügen, da sich aus diesen beiden kein Widerspruch ableiten läßt). Die Konstruktion der möglichen Welten vollzieht sich dabei nach bestimmten Regeln zur schrittweisen Aufnahme von Aussagen. Die möglichen Welten sind maximal, da man sie nicht konsistent um eine weitere Aussage erweitern kann. $\perp$ als Konstante befindet sich natürlich in keiner Zustandsbeschreibung und möglichen Welt, da diese konsistente Aussagenmengen sind.

P(W) ist die Potenzmenge der Menge der möglichen Welten, also die Menge der Teilmengen von W. $p_i$ sei eine Menge von möglichen Welten (also $p_i \in P(W)$). $\varnothing$ ist die Leere Menge. Der Gehalt einer Aussage läßt sich nun auffassen als die Menge der möglichen Welten, in denen diese Aussage wahr ist. Jeder Aussage läßt sich also ein Element aus P(W) zuordnen. $<m>|\alpha|$ ist die Menge der möglichen Welten, in denen $\alpha$ im Modell m wahr ist. $<m>|\alpha| \in P(W)$.

Das heißt: R ist eine Funktion die relativ zu einer möglichen Welt (einem Element aus W) und einer Bedingung (d.h. einer Aussage aufgefaßt als Element aus P(W)) eine Menge von deontischen Alternativen (deontisch alternativen möglichen Welten) zuordnet (also wieder ein Element aus P(W)). Es werden einer möglichen Welt also nicht bloß deontische Alternativen, sondern deontische Alternativen immer relativ zum Auftreten einer Bedingung (gemäß dem Ausgangspunkt bedingter Gebote) zugeordnet. R beachtet die folgenden Bedingungen:

(i) nicht $R(w_i,W,\varnothing)$

[d.h. es gibt deontische Alternativen; vgl. A2., denn $\perp$ würde diese Bedingung verletzen]

(ii) Wenn $w_i \in p_i$ und $R(w_i,p_i,p_j)$, so $R(w_i,W,p_j)$

[wenn $w_i$ selbst zu den Welten gehört, in denen die Bedingung erfüllt ist (also in $p_i$ ist), liegt eine unbedingte Obligation vor, so daß also auch keine Einschränkung in W vorgenommen wird, also nun alle möglichen Welten betrachtet werden; vgl. A3. zum Bilden von „O(p/T)“]

(iii) Wenn $R(w_i,p_i,p_j)$ und $R(w_i,p_i',p_j')$, so $R(w_i,p_i \cup p_i',p_j \cup p_j')$

[wegen A4.: werden disjunktive Bedingungen gebildet, sind beide Richtungen, in denen die Bedingung nun erfüllt werden kann, zu verfolgen]

(iv) Wenn $R(w_i,p_i,p_j)$ und $R(w_i,p_i,p_j')$, so $R(w_i,p_i,p_j \cap p_j')$

[vgl. T1.: wenn bei einer Bedingung jeweils verschiedenes eine deontische Alternative ist, muß beides zugleich eine deontische Alternative bilden, also der Schnitt betrachtet werden]

Als semantische Regeln zur rekursiven Bewertung aller Aussagen von DDL werden nun die folgenden Regeln für alle Modelle festgelegt: Sei $\alpha$ eine atomare Aussage, so gilt:

S1. $(\forall w \in W)\neg(w_i \models \perp)$ und

$<m,w_i> \models \alpha \leftrightarrow \alpha$ ist in der Zustandsbeschreibung, die zu $w_i$ ergänzt wird.

Ist $\alpha$ eine komplexe Aussage, so gilt:

S2. $<m,w_i> \models \neg\alpha \leftrightarrow \alpha \notin w_i$

S3. $<m,w_i> \models (\alpha \supset \beta) \leftrightarrow \alpha \notin w_i$ oder $\beta \in w_i$

S4. $<m,w_i> \models (O(\alpha/\gamma) \leftrightarrow$ Es gibt $p_i$, $p_j$ in P(W), so daß $R(w_i,p_i,p_j)$, $p_i \subseteq |\alpha|$ und $p_j \subseteq |\gamma|$

Aufgrund der Definitionen der anderen Ausdrücke reichen diese Regeln aus.

Die letzte Regel (S4.) soll die Wahrheitsbedingungen für das Gebotensein formulieren: Das Gebot ist dann „wahr“ (bzw. „richtig“), wenn alle Welten, in denen die Bedingung des Gebots erfüllt ist, über R zu Welten führen, in denen das Gebot erfüllt ist. Der moralische Gehalt in der Semantik von „O( / ‘)“ verbirgt sich also in der Relation R. Die Erklärungskraft von S4. müßte also in der Relation R liegen. R ordnet einer Welt $w_i$ genau die Welten zu, die relativ zu einer Bedingung moralisch optimal sind. Das Gebot ist bewährt, wenn in den moralisch optimalen Welten, in denen die Bedingung beachtet wird, der gebotene Sachverhalt vorliegt. Wie R das macht, wird nicht gesagt. Denn dies ist Aufgabe der Ethik!