EPISTEMISCHE LOGIK

Beschränktes Logisches Wissen

Manuel Bremer
University of Düsseldorf, Germany
www.mbph.de

Logische Idealisierung

- Wie schon bemerkt, werden in der Epistemischen Logik i.d.R. massive Idealisierungen bezüglich der logischen Kompetenz der Subjekte gemacht. Dazu zählen insbesondere die logische Allwissenheit

$$\vdash \varphi \rightarrow \vdash W_a \varphi$$

für Wissen und andere epistemische Zustände; sowie der mit EA sich daraus ergebende Logische Abschluss

$$\vdash \varphi \supset \psi \rightarrow \vdash W_a \varphi \supset W_a \psi$$

- Diese Idealisierungen sind für endliche Subjekte zu stark.
- Selbst für technische Systeme bleiben sie problematisch aufgrund ihres Charakters der Idealisierung der für eine Herleitung benötigten Ressourcen (insbesondere Zeit) (i) als auch insofern einige dieser Systeme (menschliche) Personen modellieren oder simulieren wollen (ii).
- Es wurden deshalb Ansätze entwickelt, eine begrenzte logische Kompetenz zu modellieren.
- Um deren Umfang zu beurteilen, gibt es eine Liste der problematischen Idealisierungen.

- Diese Liste wird hier bezüglich des Glaubens betrachtet; ähnliche Überlegungen lassen sich dann für andere epistemische Zustände anstellen.
- Nicht alle Einträge auf der Liste sind gleichermaßen problematisch.
- Da im Folgenden intersubjektive epistemische Zustände keine besondere Rolle spielen wird er auf ein Subjekt verweisende Index unterdrückt.
- Alle Einträge der Liste gelten in KD45 für „G“.

- (L1) $G\varphi \wedge G(\varphi \supset \psi) \supset G\psi$ (Epistemische Abtrennung)
- (L2) $\vdash \varphi \rightarrow \vdash G\varphi$ (Logische Allwissenheit)
- (L3) $\vdash \varphi \supset \psi \rightarrow \vdash G\varphi \supset G\psi$ (Logische Abtrennung)
- (L4) $\vdash \varphi \equiv \psi \rightarrow \vdash G\varphi \equiv G\psi$ (Nicht-Opazität)
- (L5) $G\varphi \wedge G\psi \supset G(\varphi \wedge \psi)$ (Abschluss unter Konjunktion)
- (L6) $G\varphi \supset G(\varphi \vee \psi)$ (Abschwächung)
- (L7) $G\varphi \supset \neg G \neg \varphi$ (Konsistenz)
- (L8) $G(G\varphi \supset \varphi)$ (Annahme des korrekten Glaubens)
- (L9) $G\top$ (Glauben des logischen Wahren)
- (L10) $G\varphi \wedge G\neg\varphi \supset G\psi$ (Epistemisches *falso ad quodlibet*)

Ansatz 1. Für-möglicherweise-wahr-Halten

• Ausgehend von: $M\varphi \overset{\text{def}}{=} \neg G \neg \varphi$

als Variante des Für-möglicherweise-wahr-Haltens, könnte man sich überlegen, darin den eigentlich gesuchten Begriff des Für-wahr-Haltens (Meinens) zu sehen.

• Zur Erinnerung: Es geht um Für-möglicherweise-wahr-Halten und nicht um Für-möglich-Halten:

$$M\varphi \not\equiv G\Diamond\varphi$$

- Semantisch entspräche dem

$$w \vDash M\varphi \text{ gdw. } \exists w' (Rww' \wedge w' \vDash \varphi)$$

Der Aspekt des Gewissseins wird damit aus dem Meinen ausgeschlossen, aber zugleich scheint die Einstellung zu schwach, um Glauben zu erfassen, wo Geglaubtes als sicherer gilt als sein Gegenteil.

- Aufgrund dieser epistemischen Schwäche des Für-möglicherweise-wahr-Haltens gelten zusammenfassende logische Prinzipien für es eher nicht, denn die Unsicherheit sollte beim Zusammenfassen zunehmen.

Konsequenzen

- Bezüglich logischen Wissens gelten nun nicht:

  (i) $\not\models M\varphi \wedge M(\varphi \supset \psi) \supset M\psi$ [vs. L1]

  (ii) $\not\models M\varphi \wedge M\psi \supset M(\varphi \wedge \psi)$ [vs. L5]

  (iii) $\not\models M\varphi \supset \neg M \neg \varphi$ [vs. L7]

  (iv) $\not\models \varphi \supset M\varphi$

Mit L1 und L5 gelten zwei wünschenswerte Eigenschaften für Glauben hier nicht.

- Es gelten allerdings:

  (i) $\models M(M\varphi \supset \varphi)$ [L8]

  (ii) $\models M\varphi \supset MM\varphi$ [S4]

(iii) $\models \neg M\varphi \supset M\neg M\varphi$ [S5]

(iv) $\vdash \varphi \equiv \psi \rightarrow \vdash M\varphi \equiv M\psi$ [L4]

(v) $\vdash \varphi \rightarrow \vdash M\varphi$ [L2]

(vi) $\vdash \varphi \supset \psi \rightarrow \vdash M\varphi \supset M\psi$ [L3]

(vii) $\models M\varphi \supset M(\varphi \vee \psi)$ [L6]

(viii) $\models M\top$ [L9]

(ix) $\models M\varphi \vee M\psi \equiv M(\varphi \vee \psi)$ [Abschluss unter „$\vee$“]

• L8 sollte gelten, da man immer das Gelingen des eigenen Glaubens – sei dies auch ein schwacher Glaube – einräumen sollte.

• Die problematischeren Einträge auf der Liste L bleiben allerdings auch gültig.

- Hinzukommt die problematische Eigenschaft (ix), aufgrund der Maximalität möglicher Welten, wobei (ix) für Glauben nicht gelten sollte, denn sonst:

$$G(\varphi \vee \neg\varphi) \supset G\varphi \vee G\neg\varphi \qquad \text{[Maximalität!]}$$

- Da dies zur Schwierigkeit hinzutritt, „M“ als Modellierung des Glaubens zu wählen, bewährt sich Ansatz 1 somit nicht.

Ansatz 2. Implizites und explizites Glauben

- Man könnte den Operator „G“ spalten in „G_i“ und „G_e“ für ‚implizites‘ und ‚explizites‘ Glauben. Während die logischen Idealisierungen für implizites Glauben gelten, gelten sie nicht für explizites Glauben. Impliziter Glauben entspricht dann eher der objektiven logischen Datenverarbeitung.
- Die einfachere Modellierung ist, Glauben nur im Sinne des expliziten Glaubens zu verstehen. Impliziter Glaube entspricht eher dem epistemischen Zustand $I_a\varphi$.

- Statt konsistenter und maximaler möglicher Welten dienen in der Semantik ‚Situationen', die unvollständig und auch inkonsistent sein können, als epistemische Alternativen.
- Die mögliche Inkonsistenz wird dadurch modelliert, dass die Bewertungen ‚falsch' v_F und ‚wahr' v_T semantisch voneinander *unabhängig* sind. Es gibt also eine zweifache Interpretation von Formeln.
- *G* sei die Menge der epistemischen Alternativen. Diese kann leer sein! Ist *G* nicht leer, sind sich die Elemente wechselseitig zugänglich, d.h. S4 und S5 gelten.
- Dann wird die Semantik des expliziten Glaubens bestimmt durch die folgenden Regeln:

(i) $s \models_T p$ gdw. $v_T(s,p) = \text{true}$

(ii) $s \models_F p$ gdw. $v_F(s,p) = \text{true}$

(iii) $s \models_T (\varphi \vee \psi)$ gdw. $s \models_T \varphi$ oder $s \models_T \psi$

(iv) $s \models_F (\varphi \vee \psi)$ gdw. $s \models_F \varphi$ und $s \models_F \psi$

(v) $s \models_T (\varphi \wedge \psi)$ gdw. $s \models_T \varphi$ und $s \models_T \psi$

(vi) $s \models_F (\varphi \wedge \psi)$ gdw. $s \models_F \varphi$ oder $s \models_F \psi$

(vii) $s \models_T \neg\varphi$ gdw. $s \models_F \varphi$

(viii) $s \models_F \neg\varphi$ gdw. $s \models_T \varphi$

(ix) $s \models_T G\varphi$ gdw. $s' \models_T \varphi$ für alle $s' \in \mathit{G}$

(x) $s \models_F G\varphi$ gdw. $s \not\models_T G\varphi$

- Aufgrund (i), (ii) und (vii) sind kontradiktorische Bewertungen möglich: $\exists s(s \vDash_T (\varphi \wedge \neg\varphi))$

- Aufgrund von (i) und (ii) – der Unabhängigkeit von v_T und v_F sind Wahrheitswertlücken möglich: $\exists s(s \nvDash_T (\varphi \vee \neg\varphi))$

- ‚Gültigkeit' wird definiert als Wahrheit in allen Modellen in allen möglichen *Welten* (d.h. nur den maximalen und konsistenten Situationen).

- Die folgenden Gültigkeiten bestehen:

(i) $\models G\varphi \supset GG\varphi$ [S4]

(ii) $\models \neg G\varphi \supset G\neg G\varphi$ [S5]

(iii) $\models G\varphi \wedge G\psi \supset G(\varphi \wedge \psi)$ [L5]

(iv) $\models G(G\varphi \supset \varphi)$ [L8]

- Aus der Semantik ergeben sich auch Ungültigkeiten:

(i) $\not\models G\varphi \wedge G(\varphi \supset \psi) \supset G\psi$ [vs. L1]

(ii) $\not\models \neg G\bot$ [vs. L7]

denn eine unvollständige Situation kann φ und $\varphi \supset \psi$ wahrmachen ohne ψ zu enthalten, daher (i).

• Relativ zu irgendwelchen – insbesondere unvollständigen oder inkonsistenten – Situationen lassen sich folgende Sätze oder Satzmengen *erfüllen* (das kann dann dazu dienen, beschränktes logischen Wissen zu modellieren):

(i) $G(p \wedge q)$ [für beliebige Elementarsätze!]

(ii) $\neg G(\varphi \wedge \psi \supset \varphi)$ [vs. L3, L2, L4]

(iii) $G(\varphi \wedge \psi) \wedge G\neg\varphi \wedge G\neg\psi$ [vs. L7]

(iv) $\neg G\varphi \wedge \neg G\neg\varphi$

(v) $G(\varphi \vee \neg\varphi) \wedge \neg G\varphi \wedge \neg G\neg\varphi$

(vi) $G\varphi$, $G(\varphi \supset \psi)$, $\neg G\psi$ [vs. L1]

(vii) $\neg G(\varphi \vee \neg\varphi)$ [vs. L9]

(viii) $G\varphi$, $\neg G(\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi))$ [vs. L9, L2, L4]

(ix) $G\varphi, G\neg\varphi, \neg G\psi$ [vs. L10]

(x) $G\varphi \wedge G\neg\varphi$ [vs. L7]

(xi) $G(\varphi \wedge \neg\varphi)$ [vs. L7]

• Nichterfüllbar sind die folgenden Sätze bzw. Satzmengen, sodass die entsprechenden Theoreme weiter gelten:

(i) $G(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg G\varphi \wedge \neg G\psi$ [L5]

(ii) $G\varphi, \neg G(\varphi \vee \psi)$ [L6]

• Damit bleiben aus der Liste L L5 und L8, die beide gelten sollten, und L6, das schon problematischer ist, übrig. Allerdings geht – in inkonsistenten Situationen – auch epistemische Abtrennung verloren [L1].

- Insofern nähert sich Ansatz 2 einem epistemologisch realistischeren Begriff des Glaubens an. Gilt allerdings selbst Epistemische Abtrennung nicht, bleibt von einer *Logik* des Glaubens, in der es ja um Abschlusseigenschaften geht, nicht viel übrig.
- Gegeben größere Ausdrucksmöglichkeiten (etwa zum Ausdrücken der Annahme, in einer konsistenten Situation zu sein) ließe sich eine abgeschwächte Form von EA einführen (anolog zu entsprechenden Vorgehensweisen bei Parakonsistenten Logiken bezüglich *Modus Ponens*).

Ansatz 3. Bekanntschaft und expliziter Glaube

• Einige Bedenken gegen logisches Wissen oder auch gegen Negative Introspektion gründen darin, dass hier Wissen bezüglich von Sätzen verlangt wird, die man noch nie gehört hat oder über deren Begrifflichkeit man nicht verfügt. Eine entsprechende Einschränkung einiger solchen Prinzipien begrenzt sich auf Anwendungen bezüglich von Sätzen, mit denen bzw. deren Begrifflichkeit man ‚bekannt' ist.

• Dazu dient der Operator „B". Für jeden Akteur gibt es eine Menge der Sätze *B*, die bekannt sind. Ein Satz, der implizit geglaubt wird *und bekannt ist*, wird explizit geglaubt.

- Als Wahrheitsbedingung gilt: $s \vDash G_e\varphi$ gdw. $\varphi \in B \wedge G_i\varphi$
- „G_i“ ist der übliche KD45-Glaubensbegriff.
- Gültig bleiben (bezüglich „G_e“):

(i) $\neg G\bot$ [L7]

(ii) $\neg(G(\varphi \wedge \psi) \wedge G\neg\varphi \wedge G\neg\psi))$ [L7. φ, ψ bekannt!]

(iii) $\neg(G\varphi \wedge G\neg\varphi)$ [D, L7, entsprechend]

(iv) $\neg G(\varphi \wedge \neg\varphi)$ [L7, keine bewusste Kontradiktion]

(v) $G\varphi \wedge G\neg\varphi \supset G\psi$ [L10! Dies ist kurios, insofern ψ nicht bekannt sein muss! Es gilt wegen (iii).]

- Ungültig sind:

(i) $G\varphi \wedge G(\varphi \supset \psi) \supset G\psi$
[vs. L1! Unter der Bedingung, dass Teilsätze bekannt sein müssen, würde L1 gelten.]

(ii) $G\varphi \supset GG\varphi$
[vs. S4, Begriff *Glauben* evtl. nicht bekannt]

(iii) $\neg G\varphi \supset G\neg G\varphi$ [vs. S5, entsprechend]

(iv) $\vdash \varphi \rightarrow \vdash G\varphi$ [vs. L2]

(v) $\vdash \varphi \supset \psi \rightarrow \vdash G\varphi \supset G\psi$ [vs. L3]

(vi) $\vdash \varphi \equiv \psi \rightarrow \vdash G\varphi \equiv G\psi$ [vs. L4]

(vii) $G\varphi \supset G(\varphi \vee \psi)$ [vs. L6]

(viii) $G(G\varphi \supset \varphi)$ [vs. L8 in seiner Allgemeinheit, s.u.]

- Erfüllbar sind die folgenden Sätze bzw. Satzmengen:

(i) $G(p \wedge q)$ [für beliebige Elementarsätze]

(ii) $\neg G(\varphi \wedge \psi \supset \varphi)$ [vs. L2, unbekannte Tautologie]

(iii) $G(\varphi \wedge \psi) \wedge \neg G\varphi \wedge \neg G\psi$ [vs. L5, im Unterschied zu L7 oben müssen die Teilsätze nicht bekannt sein!]

(iv) $\neg G\varphi \wedge \neg G\neg\varphi$ [Nicht-Maximalität, wie immer]

(v) $G(\varphi \vee \neg\varphi) \wedge \neg G\varphi \wedge \neg G\neg\varphi$

(vi) $\neg G(\varphi \vee \neg\varphi)$ [vs. L2, L9]

(vii) $G\varphi \wedge \neg G(\varphi \wedge (\psi \vee \neg\psi))$ [vs. L2, L9, L6]

• Hat man nicht nur keine Teilsatzbedingung (dass die Teilsätze eines bekannten Satzes bekannt sein müssen), sondern eine atomistische Bekanntheitsrelation für beliebig komplexe Sätze wären sogar erfüllbar:

(i) $G(\varphi \wedge \psi), \neg G(\psi \wedge \varphi)$

(ii) $GG\varphi \wedge \neg G\varphi$

Dies ging sicherlich zu weit, insofern damit einfachste logische Satztransformationen (als immer logisch wahr seiend) ausgeschlossen werden. Wegen Problemen der Form (i) gilt L8 nicht: in $G\varphi$ kann φ anderes repräsentiert werden als im zweiten Auftreten von φ: $\not\models G(G\varphi \supset \varphi)$.

- Der Ansatz beseitigt somit einige der kontraintuitiven logischen Idealisierungen sowie die der Introspektion, ohne die Teilsatzbedingung werden jedoch auch elementare logische Fertigkeiten ausgeschlossen (wie EA).

- Erhebt man die Teilsatzbedingung werden L5 und L1 gültig, L6 bleibt indessen ungültig. Dies ähnelt Relevanzlogiken (und deren Bedingung des geteilten Inhalts bei Konditionalen und Folgerungen).

- Problematisch ist die Gültigkeit von L10.

Ansatz 4. Kontextuelles Räsonieren

- Inkonsistenz kann auch ohne inkonsistente Situationen modelliert werden, indem jedem epistemischen Subjekt *mehrere* Rahmen/Kontexte von epistemischen Alternativen zugeordnet werden.
- Es gibt dann einen kontextrelativen Glauben und einen uneingeschränkten Glauben (über alle Kontexte hinweg).
- Ohne Zugangsbedingungen zu und über die Kontexte gelten dann *keine* Introspektionsprinzipien für kontextrelativen Glauben (vs. S4 und S5).

• Der kontextrelative Glauben wird damit über Kontexte bestimmt. Deswegen können Konjunktionsprinzipien, die dann ja zwei getrennte Kontexte vereinten, nicht mehr gelten – vs. L1, L5. Dies ähnelt dem Verhalten von „$\Diamond$“:

$$\Diamond\varphi \wedge \Diamond(\varphi \supset \psi) \supset \Diamond\psi$$

gilt ja auch nicht.

• L10 gilt deshalb auch nicht.

• L8 kann falsch gemacht werden, indem in jedem Kontext ‚vorgestellt‘ werden kann, dass der Glauben falsch ist.

- Da die zugrundeliegenden Welten maximal und konsistent sind, gelten einige L7-Varianten, wie

$$\neg G\bot \quad \text{oder} \quad \neg G(\varphi \wedge \neg\varphi)$$

aber verteilte Inkonsistenzen sind möglich:

$$G\varphi \wedge G\neg\varphi$$

da sich der Glauben auf verschiedene Kontexte verteilen kann.

- Aufgrund von Maximalität gilt L6.
- Insbesondere gelten Prinzipien der lokalen Logischen Allwissenheit (L2, L3, L4, L9).

- Insgesamt macht der Ansatz also gerade die akzeptableren Prinzipien (L1, L5, L8) ungültig und die unakzeptableren gültig (L2, L3, L4, L6, L9).
- Der Nutzen des Ansatzes bleibt daher auch sehr begrenzt. Insofern das Subjekt nicht quer zu Kontexten räsonieren kann, bringt deren gleichzeitige Modellierung auch keine Vorteile. Dies entspricht eher der Gleichzeitigkeit verschiedener möglicher Modelle (zu jeweiligen Kontexten).

Ansatz 5. Blinder Glaube

- Während andere Ansätze darauf zielen, welche Konsequenzen eines Glaubens man evtl. nicht glaubt, kann man auch einen Ansatz wählen, indem zu den festen Glaubenssätzen Prinzipien zählen, die selbst keine logische Abschlusseigenschaften (wie Konjunktionsbeseitigung) unterliegen müssen.

D.h. eine epistemische Alternative kann $\varphi \wedge \psi$ als Prinzip enthalten, ohne φ oder ψ zu enthalten.

Damit stehen nahezu beliebige Glaubensinhalte offen!

- Die zugrundeliegenden Welten bleiben allerdings konsistent. Die Prinzipien selbst können inkonsistent sein, d.h. $\exists s(s \vDash G_p(\varphi \wedge \neg\varphi))$.
- Geglaubt wird relativ zu den epistemischen Alternativen (Glaube im bisherigen Sinne) und den Prinzipien:

$$s \vDash G_p\varphi \text{ gdw. } s \vDash G\varphi \text{ oder } \varphi \in \text{Prinzipien}(s)$$

- Wegen der Unabgeschlossenheit der Prinzipien können fast alle Abschlusseigenschaften ungültig gemacht werden: L1, L3, L4, L5, L6, L7, L8, L10, S4, S5.

Beispiel: Man hält $\varphi \wedge \psi$ für ein Prinzip, also $G_p(\varphi\wedge\psi)$, aber – ohne konjunktiven Abschluss – nicht φ oder ψ: $\neg G_p\varphi$.

- Wegen der Logischen Allwissenheit bezüglich des herkömmlichen Glaubens bleiben allerdings: L2 und L9.
- Die eingeräumte mögliche Inkonsistenz bleibt nur harmlos, da gar keine Abschlussprinzipien mehr gelten!
- Damit steigert der Ansatz aber nur die Unplausibilität, da der entsprechende Glaubensbegriff keine interessante epistemologische Rolle mehr spielen kann.
- Ein ähnlicher Effekt lässt sich erzielen, wenn man neben den möglichen Welten unmögliche Welten zulässt, die jeden Satz atomistisch bewerten, d.h. deren Semantik noch nicht einmal kompositional ist. Alle Prinzipien L1 – L10 können dann falsifiziert werden. – Doch wozu?

Literatur

Diese Folien basieren auf Meyer/van der Hoek, *Epistemic Logic for AI and Computer Sciene*, S. 71 – 89, wo sich die Verweise auf die Vertreter der einzelnen Ansätze finden.