EPISTEMISCHE LOGIK
Grundlagen

Endliches Wissen

Manuel Bremer
University of Düsseldorf, Germany
www.mbph.de

Endliche epistemische Subjekte

- Wie in der Einführung erläutert behandelt die formale Erkenntnistheorie zunächst menschliche Personen, also epistemische Subjekte, die wir als endlich in ihren Fähigkeiten des Schließens und Speicherns ansehen können.
- Auch annehmen können wir, gegeben unser empirisches Wissen, dass die Anzahl der epistemischen Subjekte endlich ist, war und bleiben wird – jedenfalls in diesem Universum.

Axiom der Nichtallwissenheit

- Bei der Betrachtung der basalen Prinzipien haben wir gesehen: $\neg(\exists a)(\forall t)W_a t$

Ein Argument: die Menge der Wahrheiten ist unendlich

$$p \supset p,\ p \supset p \vee p_2,\ p \supset p \vee p_3,\ \ldots$$

Ein endliches Subjekt kann sie also nicht gleichzeitig wissen, da es sie nicht gleichzeitig repräsentieren kann.

- Positiv gewendet:

Axiom $\vdash(\forall a)(\exists t)\neg W_a t$

Axiomatisierung und Unvollständigkeit

• Die gerade gebrachte Argumentation mag als unzureichend angesehen werden, wenn

(i) man Wissen nicht als Akt, sondern als Disposition versteht, womit die Schwierigkeit der Gleichzeitigkeit unendliches Wissen entfallen kann,

(ii) man sieht, dass die angegebene Menge logischer Wahrheiten reduziert werden kann auf eine endliche – oder zumindest rekursive – Axiomatisierung.

[Muss das Argument also aufgegeben werden?]

- Das Axiom zur Nichtallwissenheit muss nicht aufgegeben werden, denn

(i) nicht alle logischen Wahrheiten sind rekursiv axiomatisierbar [in der FOL aufgrund von *Gödels Ersten Unvollständigkeitstheorem*, in der SOL indirekt aufgrund von *Churchs Theorem*]

(ii) nicht alle empirischen Wahrheiten sind in einem nicht determinierten oder in seinen Gesetzen nicht kompakten Universum rekursiv axiomatisierbar.

Theorem der Nicht-gewussten-Wahrheit

- Ausgehend vom Axiom der Nichtallwissenheit, können wir für das Theorem der Nicht-gewussten-Wahrheit

Theorem $\vdash \neg(\forall t)(\exists a)W_a t$

bzw. $\vdash(\exists t)(\forall a)\neg W_a t$

argumentieren. [Wie?]

• $\vdash \neg(\forall t)(\exists a)W_a t$

Begründung:

Axiom: $\vdash(\forall a)(\exists t)\neg W_a t$

Betrachten wir nun die zu den endlich vielen Subjekten a_1, a_2 … a_n gehörigen Nicht-gewussten-Wahrheiten t_1, t_2 … t_n. Nun kann a_2 vielleicht t_1 wissen etc., indessen die Konjunktion (t*)

$$t_1 \wedge t_2 \wedge \dots t_n$$

kann niemand wissen, da jedes epistemische Subjekt mindestens ein Konjunkt nicht weiß. (In den formalen Beweis gehen nur das l-Postulat zur ($\wedge$B) und Kontraposition ein. [Warum?])

- Aus dem Axiom [$(\forall B)$,$(\exists B)$]: $\neg W_{a1}t_1$

  Instanz eines l-Postulat: $W_{a1}(t^* \supset t_1)$

  also [EA & Kontraposition]: $\neg W_{a1}t_1 \supset \neg W_{a1}t^*$

  also [$\supset$B]: $\neg W_{a1}t^*$

  also [$\forall$E]: $(\forall a) \neg W_a t^*$

  also [$\exists$E]: $(\exists t)(\forall a) \neg W_a t$

(Ein Subjekt muss nicht konkret t* kennen, sondern nur wissen, dass eine von ihm nicht gewusste Wahrheit, die es auch nicht konkret kennt, ein Konjunkt von t* ist.)

- Es gilt $\vdash(\exists t)(\forall a)\, \neg W_a t$

und damit: $\vdash \Box(\exists t)(\forall a)\, \neg W_a t$

- Es gilt hingegen nicht ohne Weiteres: $(\exists t)\Box(\forall a)\, \neg W_a t$

Ob dieser Satz gilt, hängt der modalsemantischen Annahme ab, ob es eine konstante *domain* von Individuen gibt. Gibt es eine allgemeine *domain* von Individuen, lässt sich t* als Satz konstruieren, den niemand in *irgendeiner* möglichen Welt wissen kann, so dass $\vdash(\exists t)\Box(\forall a)\, \neg W_a t$, da ($\Box$E) dann zulässig ist, bei Sätzen mit Individuentermen. Bei weltrelativen *domains* gibt es *für jede Welt einen Satz*, den niemand dort wissen kann, $\Box(\exists t)(\forall a)\, \neg W_a t$, *dieser Satz* von w_1 kann aber in anderen Welten w_2, w_3 … gewusst werden.

• Daran anschließend: angenommen wir haben für jede mögliche Welt den Satz t^*_1, t^*_2 … Ausgehend von der Annahme einer endlichen Wirklichkeit mit endlich vielen epistemischen Subjekten gibt es auch nur endlich viele mögliche Welten. Also gibt es einen Satz t**, welcher die Konjunktion aller weltrelativer Sätze t^*_1, t^*_2 … ist. Dieser konkrete Satz – ein bestimmter, wenn auch von uns nicht angebbarer Satz – existiert in jeder möglichen Welt. Also steht der Ableitung von

$$(\exists t)\Box(\forall a)\,\neg W_a t$$

nichts im Wege. t** ist ein *notwendigerweise nicht-wissbarer Satz*, t* ein nicht-wissbarer Satz.

Nichtwissbarkeit

- $$(\exists t)\Box(\forall a)\,\neg W_a t$$

geht über Nichtwissen hinaus, denn wir haben [$\Box/\Diamond$, $\forall/\exists$]:

$$\neg\forall t\Diamond\exists a W_a t$$

Es gibt Wahrheiten, die *notwendigerweise* nicht wissbar sind. Ein solcher Satz (wie t**) bietet ein Gegenbeispiel zur Wissbarkeitsthese (‚knowability thesis'):

$$\forall t\Diamond\exists a W_a t$$

- Die Nichtallwissenheitsannahme bezog sich auf epistemische Subjekte: Niemand kann alles wissen.
- Die Existenz von Geheimnissen bedingte, dass nicht alle Wahrheiten gleichzeitig von allen gewusst werden können.
- Die Nichtwissbarkeitsthese sagt darüber hinaus, dass es Wahrheiten gibt, die niemand wissen kann (niemand, in keiner möglichen Welt). Dies ist die stärkste These dieser Gruppe.

Gesamtheitswissen

- Bezüglich von Gesamtheiten haben wir schon zwischen distributiven und kollektiven Gesamtheitswissen unterschieden: $\forall x W_a F(x)$ *vs.* $W_a \forall x F(x)$
- Endliche epistemische Subjekte können bezüglich unendlicher Mengen (etwa von Zahlen) nur kollektives Gesamtheitswissen haben.

Grenzen der Repräsentationskomplexität

- Endliche Subjekte können nicht alle (unendlichen vielen) Wahrheiten kennen. Sie können auch nicht beliebig lange Sätze repräsentieren, da ihr Arbeitsgedächnis begrenzt ist.
- Dies ist einer der Gründe, warum allgemeines Wissen ihnen eher in der Form von Allsätzen als in der Form der Gesamtheit der betreffenden Sätze zur Verfügung steht.

- Damit ergibt sich ein Unterschied zwischen Schema und Allsätzen:

$$W_i(\alpha \supset \alpha)$$

$$\forall p\ W_i(p \supset p)$$

- Das Schema $W_i(\alpha \supset \alpha)$ ist akzeptabel. Es besagt, dass ich bezüglich eines beliebigen Satzes, den ich denke, von der Selbstimplikation weiß, d.h. dass ich sobald ich ihn denke – aber auch nur dann – zugleich von seiner spezifischen Selbstimplikation weiß.

- Der Allsatz

$$\forall p\ W_i(p \supset p)$$

ist inakzeptabel zumindest in einer Lesart, die nicht rein *de re* ist. Er besagt dann nämlich, dass ich von jedem Satz weiß, dass er sich selbst impliziert (d.h. ein individuelles entsprechendes Wissen besitze, also insgesamt eine unendliche Menge solcher logischen Wahrheiten).
Eine *de re* Lesart kann ein Realist bezüglich von Sätzen akzeptieren. Sie sagt, dass wer das Schema kennt, damit auch von der Gesamtmenge der Sätze von deren Selbstimplikation weiß.

- Entsprechend ist akzeptabel

$$\exists a\ W_a(\forall p(p \supset p))$$

- Problematisch ist

$$\exists a \forall p\ W_a(p \supset p)$$

bei der entsprechenden Lesart (s.o.).

- Bezüglich logischer Wahrheiten besitzen endliche Subjekte daher allein kollektives aber kein distributives Wissen.