# EPISTEMISCHE LOGIK
# Grundlagen

## Kollektives Wissen

Manuel Bremer
University of Düsseldorf, Germany
www.mbph.de

# Gemeinsames Wissen

• Gemeinsames – oder ‘wechselseitiges’ – Wissen ist eine wichtige Komponente z.B. bei Konventionen, insofern alle von allen wissen (müssen), dass diese von allen wissen, dass sie auch die Konvention kennen (und beachten).

• Es hat die allgemeine Struktur:

$$\forall a W_a(\forall b W_b p) \qquad \text{bzw.} \qquad \forall a W_a(\forall b W_b(p \wedge W_a p))$$

• Wechselseitiges Wissen ist eine Form des reflexiven Meta-Wissens.

- Man könnte sich überlegen, dass für Konventionen wechselseitiger Glaube reicht, denn wenn alle glauben, dass alle glauben, dass alle glauben … ergibt sich die benötigte Stabilität wechselseitiger Erwartungserwartungen.
- Wenn aber alle glauben … dann liegt nach der schwachen Definition des Wissens auch Wissen vor. (Dieses muss natürlich den Mitgliedern der beteiligten Gruppen nicht explizit bewusst sein.)

# Gemeines Wissen, Gruppenwissen

- Gruppenwissen teil eine Gruppe, ob ihre Mitglieder dies wiederum wissen oder nicht:

$$\forall a W_a p$$

- Gruppenwissen kann sich auf beliebige Sachverhalte erstrecken.
- Gruppenwissen ist im Unterschied zu wechselseitigen Wissen nicht zwangsläufig ein Meta-Wissen.

# Distributives und kollektives Gruppenwissen

- Neben dem Wissen, das *alle* Mitglieder einer Gruppe haben [also $\forall a W_a p$], gibt es auch *distributives* Gruppenwissen: Wissen, das sich über die Mitglieder einer Gruppe verteilt.
- Distributives Wissen besagt

$$W_{Fd}p \overset{\text{def}}{=} \exists a \in F(W_a p)$$

- Kollektives Wissen entspricht der Erläuterung oben

$$W_{Fk}p \overset{\text{def}}{=} \forall a \in F(W_a p)$$

# Aggregiertes Gruppenwissen

- Für die Erkenntnistheorie interessant (etwa zur Beschreibung einer wissenschaftlichen Gruppe oder dem Stand des Wissens im Allgemeinen) ist die Annahme eines *aggregierten* (d.h. sowohl konjunktiv als auch – zumindest partiell – logisch abgeschlossenen) Gruppenwissens.

- Insofern einzelne ihr Wissen nicht miteinander verbinden, kann es sein, dass eine Gruppe als aggregierte Gesamtheit ‚eigentlich' etwas weiß, dies ihren einzelnen Mitgliedern aber noch nicht zur Verfügung steht.

- Eine Definition des aggregierten Gruppenwissens ist:

$$W_{Fa}p \overset{\text{def}}{=}$$

$$\exists a_1 \in F \ldots \exists a_n \in F(W_{a1}q_1 \ldots \wedge W_{an}q_n \wedge (q_1 \ldots \wedge q_n \supset p))$$

- Man könnte dies bezüglich der Implikation noch weiter abschwächen $W_{aj}(q_1 \ldots \wedge q_n \supset p)$, obwohl dies in einem *epistemischen* Sinne keine Abschwächung wäre: es gäbe jemanden, der schon die Zusammenhänge überschaut.
- In diesem Sinne können zwanzig Forscher aggregiert die Lösung ‚schon' haben, obwohl sie noch keiner individuell kennt. Die Lösung liegt aber ‚in der Luft'.

• Der Übergang von aggregierten zu kollektiven Wissen motiviert Kommunikation.
Teilen die zwanzig Forscher sich wechselseitig ihr Wissen mit, kann jeder – idealerweise – individuell die Konsequenzen ziehen und sie besitzen danach das entsprechende kollektive Wissen: $\forall a \in F(W_a p)$.

# Theoreme kollektiven Wissens

- Aus den Definitionen lassen sich entsprechende logische Wahrheiten, welche die Formen kollektiven Wissens unterscheiden, herleiten, z.B.

$$\vdash W_a p \wedge W_b q \wedge a \in F \wedge b \in F \supset W_{Fa}(p \wedge q)$$

$$\nvdash W_a p \wedge W_b q \wedge a \in F \wedge b \in F \supset W_{Fd}(p \wedge q)$$

$$\vdash W_a p \wedge a \in F \supset W_{Fd} p$$

$$\vdash (\forall a \in F \supset a = b) \supset (W_b p \supset W_F p)$$

Eine Einergruppe ist der Grenzfall des Gruppenwissens.

- Wenn jeder etwas nicht weiß, wissen alle etwas nicht:

$$\forall a \in F(\exists p \neg W_a p) \vdash \exists q \neg W_{Fk} q$$

(Im Vordersatz ist natürlich das Nichtgewusste relativ zu jedem einzelnen Gruppenmitglied, im Hintersatz gibt es ein bestimmtes Nichtgewusstes für die Gruppe.)

[Warum gilt das?]

- $\forall a \in F(\exists p\, \neg W_a p) \vdash \exists q\, \neg W_{Fk} q$

gilt im einfachsten Fall, wenn $q \equiv p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n$
für $a_1, a_2 \ldots a_n \in F$.
Auch in diesem Fall allerdings:

$$\forall a \in F(\exists p\, \neg W_a p) \nvdash \exists q\, \neg W_{Fa} q$$

denn was einer nicht weiß, könnte jeweils der andere wissen, sodass insgesamt alles (aggregiert) gewusst wird.

# Kollektives Glauben, Überzeugtsein …

- Die gerade gegebenen Definitionen ließen sich auch ausdehnen auf entsprechende Formen des kollektiven, dabei evtl. distributiven oder aggregierten, Glaubens, Überzeugtseins oder Für-möglicherweise-wahr-Haltens.

# Geheimnisse

- Unter der plausiblen Annahme, dass es für jedes epistemische Subjekt etwas gibt, das niemand sonst weiß (d.h. jeder mindestens ein Geheimnis hat)

$$\forall a \exists t \forall b (W_b t \supset b = a)$$

folgt mit den modalen Prinzipien [$\Box\forall$]:

$$\forall a \Box \exists t \forall b (W_b t \supset b = a)$$

und man kann zumindest plausibel finden, dass

$$\forall a \exists t \Box \forall b (W_b t \supset b = a)$$

• Diese Geheimnisse begründen auf eine zweite Weise, dass es niemanden gibt, der alles wissen kann:

$$\vdash \neg\exists a \Diamond \forall t W_a t$$

$$\vdash \forall a \neg \Diamond \forall t W_a t$$

(Dies folgte auch aus dem Nichtallwissenheitsaxiom.)

Die Gesamtheit (Konjunktion) t* der Geheimnisse kann auch niemand wissen: $\Box\exists t\forall a\neg W_a t$.

• Auch jedes individuelle Geheimnis lässt sich – *per definitionem* – von außen nicht (als Satz) angeben.

• In diesem Sinne gibt es *kein vollständiges* kollektives Wissen: $\neg\Diamond(\forall p)(\exists a W_a p \supset \forall b W_b p)$

- Die Existenz von Geheimnissen besagt nicht nur, dass es niemanden gibt, der alles weiß, sondern darüber hinaus, dass es niemanden gibt, der alles weiß, *was gewusst wird*:

$$\neg\exists a(\forall t(\exists b W_b t \supset W_a t))$$

- Das sagt erkenntnistheoretisch mehr als

$$\neg\exists a\forall t W_a t$$

denn die untere Formel beschränkt uns alle ‚nur' darin, irgendetwas nicht zu wissen, was vielleicht sowieso keiner weiß. Die obere Formel beschränkt uns auf unser Wissen, während es zugleich nicht deckungsgleiches Wissens *anderer* gibt.