EPISTEMISCHE LOGIK
Grundlagen

Für-möglich-Halten

Manuel Bremer
University of Düsseldorf, Germany
www.mbph.de

Definition

- Wir hatten definiert

  Def. $M_a p \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\exists q)(G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p))$

  Man hält etwas für möglicherweise wahr, wenn man nichts meint, von dem man meint, dass es dieses ausschließt.

- Was man für möglicherweise wahr hält kann wahr sein, ohne dass irgendetwas, das man glaubt, falsch sein muss.

- Die Wahrheit des für möglicherweise wahr Gehaltenen kommt zu den anderen Wahrheiten hinzu.

• Die Definition ist sehr ‚liberal‘ bzw. ‚leichtgläubig‘ bezüglich „M( )“: ihr gemäß glauben wir alles, zu dem wir *keine Gegengründe* haben.

• Weniger leichtgläubig wäre eine Konzeption von „M( )“ der gemäß es sich um eine eigenständige, wenn auch schwache Festlegung handelt, was der Fall ist. Dem gemäß ließe sich „M( )“ nicht wie oben definieren, sondern wäre elementar.

• Typischerweise kann man etwas für-möglicherweise-wahr-halten, weil man nur schwache Gründe für es hat *oder* weil man keine Gründe hat, warum es nicht der Fall sein könnte. Die Definition knüpft eher an die zweite Klausel an.

- Die Definition schließt schon aus: $M_a p \wedge G_a \neg p$

  $\vdash M_a p \supset \neg G_a \neg p$

  [Warum?]

- Man kann nicht etwas für-möglicherweise-wahr-halten, dessen Gegenteil man glaubt: $\vdash \neg (M_a p \wedge G_a \neg p)$
Denn: $G_a \neg p$ und das Wissensaxiom $W_a(p \vee \neg p)$ enthalten mittels des geringen logischen Wissens $p \vee \neg p \equiv p \supset p$, das $G_a(\neg p \supset \neg p)$, also nach der Definition „M“: $\neg M_a p$ ↯

- Das erscheint *prima facie* als implausibel, da man doch wohl sehr wohl, obwohl man etwas glaubt, das Gegenteil für möglich halten kann (etwa dass man noch Tee in der Dose hat, obwohl es möglich ist, dass sie leer ist).

- Wäre diese Überlegung trifftig müsste der Operator „M( )“ anders definiert werden. Aber wie dann?

Epistemischer Zustand *vs*. modaler Glaube

• Das Problem löst sich auf, wenn wir zwischen dem *epistemischen Zustand* für-möglicherweise-wahr-halten und dem *modalen Glauben*, dass etwas möglich ist, unterscheiden:

$$M_a p \not\equiv G_a \Diamond p$$

[Wie ließe sich der Unterschied erläutern?]

Zwei *explicanda* für ‚Möglich-Halten'

- „M_ip" drückt eine schwache epistemische Festlegung aus: ich halte *p* für möglicherweise *wahr* (d.h. in der *aktualen* Welt der Fall), obwohl ich keine stärkeren Gründe besitze.
- „$G_a \Diamond$p" drückt einen modalen Glaube aus: ich glaube tatsächlich (evtl. begründet), dass es *eine möglich Welt gibt* – was immer genauer ‚mögliche Welten' sein mögen – in der *p* der Fall ist, wobei dies *nicht* die aktuale Welt sein muss.

• Man könnte somit sagen, dass das umgangssprachliche „etwas für möglich halten“ zwei *explicanda* hat: ein epistemologisches und ein modalepistemologisches.

• Genauer: „$M_i p$“ drückt eine epistemische Modalität aus. „$\Diamond p$“ drückt eine alethische Modalität aus. „$G_a \Diamond p$“ drückt eine epistemische Modalität bezüglich einer alethischen Modalität aus: eine *modalepistemische Einstellung*.

• Eine modalepistemische Einstellung betrifft unser Wissen bezüglich modaler Zusammenhänge und Sachverhalte. Ist *p* möglich und ich glaube „$\Diamond p$“ habe ich *modales Wissen* (genauer: modalalethisches Wissen).

- $M_i p \wedge G_i \neg p$ ist inkonsistent, da ich nicht von der aktualen Welt (der Wirklichkeit) glauben kann, dass $\neg p$ der Fall ist und außerdem noch p
[gegeben unsere obigen Konsistenzthesen, „p“ ist keine Antinomie, die gesondert parakonsistent zu behandeln wäre, sondern irgendein Satz].

- $G_i \Diamond p \wedge G_i \neg p$ ist konsistent, da ich gleichzeitig glauben kann, dass $\neg p$ der Fall ist, es aber ‚neben‘ der aktualen Welt eine andere mögliche Welt gibt, in der p der Fall ist.

- Genauer könnte man sagen „M( )“ repräsentiert den epistemischen Zustand: etwas-für-möglicherweise-wahr-halten *vs*. etwas-für-möglich-halten. *Wahrheit* betrifft immer die aktuale Welt (bzw. indirekt die Wirklichkeit).
- „M( )“ repräsentiert also eine epistemologische Modalität.
- „$\Diamond$“ repräsentiert eine alethische/ontologische Modalität.
- Wir haben gerade somit gesehen, dass diese beiden Modalitäten nicht zusammenfallen. „$G_a\Diamond p$“ verknüpft sie.
- Wenn wir uns ganz genau ausdrücken, müssen wir also unterscheiden zwischen „etwas für möglich halten“ und „etwas für möglicherweise wahr halten“.

• $\vdash M_a p \supset \neg G_a \neg p$ gilt also.

Wie sieht es mit der Konversen

$$(*)\quad \neg G_a \neg p \supset M_a p$$

aus?

[Sollte dies gelten? Gilt es?]

[(*) besagt per Kontraposition: $\neg M_a p \supset G_a \neg p$. Wir wissen schon, dass aufgrund von Abschwächung gilt: $\neg M_a p \supset \neg G_a p$. Gilt also (*)?]

- (1) $\neg M_a p \supset G_a \neg p$

besagt wesentlich mehr als

(2) $\neg M_a p \supset \neg G_a p$

Denn (2) sagt nur, dass etwas, das man nicht für möglicherweise wahr hält, man auch nicht glauben kann. (1) indessen sagt, dass, wenn man etwas nicht für möglicherweise wahr hält, man auch *sein Gegenteil glaubt*!

- Trotzdem: $\vdash \neg M_a p \supset G_a \neg p$

Denn angenommen: $\neg M_a p$

also [Df. „M“]: $(\exists q)(G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p))$

also [∃B]: $G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p)$

also [EA]: $G_a \neg p$

- (1) $\neg M_a p \supset G_a \neg p$ bzw. (1') $\neg G_a \neg p \supset M_a p$

erscheinen implausibel: was ist z.B. mit all den Sätzen, über die man noch nie nachgedacht hat? Handelt es sich nicht um dasselbe kognitionstheoretische Problem wie bei der Negativen Introspektion?

• Wir müssen uns sowohl an die Definition von „M“ als auch daran erinnern, dass epistemische Zustände dispositional sind. Es gelten positive Zugänglichkeit und Epistemischer Abschluss.

• Zwei Fälle sind zu beachten:
man hat Gegengründe (Fall 1) oder man hat keine Gegengründe (Fall 2), evtl. weil man noch nie über die Frage nachgedacht hat.

• Fall 1: Das heißt hier: *wenn* man das Gegenteil von etwas glaubt, dann wird man auf Befragung oder Selbstbefragung *einen Grund finden*, warum man es *nicht* für möglicherweise wahr halten sollte. Dies sagt die Definition von „M( )“.

- Fall 2: Wenn man keine Gegengründe glaubt, ist dies *nicht* offensichtlich – Negative Introspektion gilt ja nicht – so dass die Zustimmung zum möglichen Wahrsein des fraglichen Umstandes eine *elementare* Offenheit für das mögliche Wahrsein ausdrückt.

- Die Problematik ähnelt dem kognitionstheoretischen Argument gegen die Negative Introspektion, tritt aber weniger paradox auf. Die Ähnlichkeit liegt darin, dass man beliebige Inhalte, über die man noch nicht nachgedacht hat und zu denen einem keine Gegengründe einfallen, für möglicherweise wahr hält (halten soll).

• In der Definition von „M( )“ drückt sich damit ein *Prinzip der Leichtgläubigkeit* (‚credulity‘) aus: Solange man keine Zweifel hat, dass *p*, sollte man *p* mindestens für möglich halten. Zweifel sind nichts anderes als Gegengründe im Sinne unserer Definition „M“.
[Ein solches Prinzip der ‚credulity‘ verteidigt z.B. Chisholm.]

• Wir haben also gesehen:

$$\vdash M_a p \equiv \neg G_a \neg p$$

Etwas möglicherweise für wahr halten heißt *dasselbe* wie *nicht das Gegenteil zu glauben*.

• Diese erkenntnistheoretisch nicht implausible Gleichsetzung birgt allerdings ein Problem! [s.u.]

Noch einmal „M“-Axiome

- In Kapitel 2 haben wir einige Axiome/Prinzipien in ihren „M“-Varianten als ‚problematisch‘ bezeichnet. Dies war bevor wir Für-möglicherweise-wahr-Halten unterschieden haben von Für-möglich-Halten. Für-möglicherweise-wahr-Halten stellte sich nun als die schwächste epistemische Einstellung heraus.
- Auch für die schwächste epistemische Einstellung sollte allerdings das Prinzip des schwächsten Kettengliedes gelten.

- Aufgrund des Prinzip des schwächsten Kettengliedes sollte ich, wenn ich *p* für möglicherweise wahr halte, und es für möglichweise wahr halte, dass wenn *p* der Fall ist, *q* der Fall ist, auch *q* für möglicherweise wahr halten, d.h.

Axiom $\vdash M_a p \wedge M_a(p \supset q) \supset M_a q$

Deshalb wurde in Kapitel 2 Epistemischer Abschluss als Schema für alle epistemischen Zustände eingeführt.

- Wir haben mit Distribution zwei Axiomenschemata:
  Für einen der epistemischen Kontexte φ (W/Ü/G/M):

Axiomenschema $\vdash \varphi_a p \wedge \varphi_a(p \supset q) \supset \varphi_a q$

Axiomenschema $\vdash \varphi_a p \wedge \varphi_a q \equiv \varphi_a(p \wedge q)$

• Die „W“-Varianten ließen sich aus den anderen herleiten, wie wir oben [Kap. 2] gesehen haben.

• Aus dem Prinzip des schwächsten Kettengliedes und den Axiomen zur epistemischen Abschwächung folgt, dass die Kombination von Prämissen auf der unteren Stufe erfolgt:

Theorem $\vdash Ü_a p \wedge G_a q \supset G_a(p \wedge q)$

Theorem $\vdash Ü_a p \wedge M_a(p \supset q) \supset M_a q$

usw.

Konsistenz für „M( )“?

• Angenommen wir hätten folgendes Axiom: Wenn ich etwas für möglicherweise wahr halte, kann ich nicht zugleich sein Gegenteil für möglicherweise wahr halten:

*-Axiom $\vdash M_a p \supset \neg M_a \neg p$

Das erscheint plausibel, insofern sich die das Für-möglicherweise-wahr-Halten auf die eine aktuale Welt bezieht. Sollten wir diese nicht für konsistent halten?

*-Axiom wäre das eigentliche Konsistenzaxiom. [Warum?]

• Wenn wir das eine Abschwächungsaxiom

Axiom $\vdash Ü_a p \supset G_a p$

ergänzen durch eine zweite Form

Axiom $\vdash G_a p \supset M_a p$

ergibt sich die andere Variante der Konsistenz als

*-Theorem $\vdash G_a p \supset \neg G_a \neg p$

• Mit der Definition von „M“ und G-Konsistenz wiederum hätten wir Abschwächung in der zweiten Form als Theorem [vgl. Kap. 2].

Epistemischer Modaler Kollaps

• Es droht nun jedoch ein epistemischer modaler Kollaps!

• Das Konsistenzaxiom für „M( )“, die Definition für „M( )“ und das Abschwächungsprinzip führen zu:

$$*\vdash G_a p \equiv M_a p$$

was natürlich unakzeptabel ist.

[Warum kommt es zum modalen Kollaps?]

- $*\vdash G_a p \equiv M_a p$

Theorem [aus Df. „M“]: $\neg G_a \neg p \equiv M_a p$
[Abschwächung]: $\vdash G_a p \supset M_a p$
Angenommen: $M_a p$
also [Konsistenz]: $\neg M_a \neg p$
also [AL & Theorem]: $G_a \neg\neg p$
l-Wissen: $G_a(\neg\neg p \equiv p)$
also [EA]: $G_a p$
also [⊃E, AL]: $G_a p \equiv M_a p$

- Damit fielen die beiden epistemischen Modalitäten „M( )“ und „G( )“ zusammen! Das widerspricht der bisherigen Erläuterung der beiden epistemischen Zustände!

Auflösung des Epistemischen Modalen Kollaps

- Um dieses unerwünschte Resultat zu vermeiden, muss irgendetwas aufgegeben werden: M-Konsistenz, die Definition von „M“ oder Abschwächung.
- Das eingehende l-Wissen von $p \equiv \neg\neg p$ ist elementar.
- Abschwächung entspricht dem Bild einer Abstufung epistemischer Festlegungen und lässt sich somit schwer aufgeben.
- Die Alternative besteht also zwischen M-Konsistenz und der Definition von „M“.

- Alternative 1: Man könnte die Definition von „M“ fallenlassen und – wie oben erwähnt – „M“ als ebenfalls *basalen* epistemischen Operator einführen. Für diesen ließe sich dann Konsistenz festlegen. Man verlöre allerdings die erkenntnistheoretisch motivierbare Definition und Erläuterung des Für-möglicherweise-wahr-Haltens als eines liberalen Einräumens von allem, für das man keine Gegengründe hat.

- Alternative 2: Man hält aus eben diesen erkenntnistheoretischen Gründen an der Definition von „M“ fest. Dann muss man M-Konsistenz aufgeben! Wie schlimm wäre das? Wir haben schon öfter bemerkt, dass Konsistenz eine unrealistische Anforderung an epistemische Subjekte ist. Sie wird auch nur *im Skopus* des epistemischen Operators „M“ aufgegeben. Daraus ergibt sich keine allgemeine parakonsistente Logik. Subjekte, die Widersprüchliches für möglicherweise wahr halten, sollten – und werden – eben nicht per *ex falso quodlibet* abtrennen. Im Übrigen kann man sogar G-Konsistenz als Axiom beibehalten. Abschwächung der zweiten Form ist dann ein Theorem.

- Die zweite Alternative wird hier präferiert.

Konfligierende Meinungen zu Unbekanntem

- Das Aufgeben von Konsistenz hat Konsequenzen für den Fall solcher Umstände, die man noch nie bedacht hat. Mit dem Theorem

$$\vdash \neg G_a \neg p \equiv M_a p$$

lässt sich zugleich für $M_a p$ und $M_a \neg p$ argumentieren, bei Abwesenheit von Konsistenz ist $M_a p$ kein Grund mehr, $M_a \neg p$ auszuschließen. In diesen Fällen hält man sowohl *p* wie auch dessen Gegenteil für möglicherweise *wahr* – und hat damit sich widersprechende Meinungen!

Die eigentlichen Problemfälle des Für-möglich-Haltens

- Die Schwierigkeiten, die man mit den „M“-Prinzipien der Konjunktion und Abtrennung haben könnte, sind eigentlich Schwierigkeiten für „$G_a\Diamond p$“.
- $G_a\Diamond p \wedge G_a\Diamond\neg p \supset G_a\Diamond(p \wedge \neg p)$

gilt offensichtlich nicht (gegeben Konsistenz).

- $G_a\Diamond p \wedge G_a\Diamond(p \supset q) \supset G_a\Diamond q$

gilt auch nicht. [Warum?]

- $G_i \Diamond p \wedge G_i \Diamond (p \supset q)$

besagen, dass ich *p* für möglich halte, und dass ich es für möglich halte, dass wenn *p* der Fall ist, *q* der Fall ist. Das heißt jeweils, dass ich jeweils eine mögliche Welt einräume, in der dies der Fall ist – *aber* es muss sich dabei nicht um *dieselbe* mögliche Welt handeln. Abtrennung kommt also nicht zum Zuge.

- Entsprechend gilt auch nicht: $G_a \Diamond p \supset \neg G_a \Diamond \neg p$

  [Warum?]

Mögliche Wahrheiten

- Neben Theoremen und Wahrheiten, gibt es auch Aussagen, die zumindest wahr sein *können*, auch solche über epistemische Zustände.
- Beispiel:

$$\forall a \forall p(M_a(p \supset \exists b W_b p))$$

muss wahr sein *können* (d.h. ein Modell haben).

[Warum?]

• Wir wissen $\nvdash \forall a \forall p\, G_a \neg p$ denn sonst wäre die „G“-Logik trivial und inkonsistent, da unmittelbar aus $\vdash \forall a \forall p G_a \neg p$, $\vdash G_a \neg\neg p$, also $\vdash G_a(\bot)$.

Angenommen $\vdash \neg(\forall a \forall p(M_a(p \supset \exists b W_b p)))$

also [Theorem oben]: $\vdash \neg(\forall a \forall p(\neg G_a \neg(p \supset \exists b W_b p)))$

also: [$\forall/\exists$,AL]: $\vdash \exists a \exists p\, G_a(p \wedge \forall b \neg W_b p)$

also: [$\exists$B,$\forall$B]: $\vdash G_a(p \wedge \neg W_a p)$

also: [Df. „W“, $\wedge$Dis]: $\vdash G_a p \wedge G_a(G_a p \supset \neg p)$

also: [EA, $\forall$E]: $\vdash \forall a \forall p\, G_a \neg p$ ↯

d.h.: *von* allen Wahrheiten müssen alle es für möglicherweise wahr halten *können*, dass es jemand gibt, der sie weiß: $\forall t \forall a(M_a(\exists b W_b t))$, was unserer Wahrheit entspricht.

• $\forall a \forall t(M_a(\exists b W_b t))$
ist eine Aussage *über Subjekte* und Wahrheiten. Sie darf nicht verwechselt werden mit einer Aussage über Meinungen von epistemischen Subjekten *über Wahrheiten*

$$\forall a(M_a(\forall t \exists b W_b t)) \qquad (*)$$

was dem Theorem der Nicht-gewussten-Wahrheit [Kap. 8]

Theorem $\vdash \neg\forall t \exists a W_a t$

widerspricht. Insofern man das Theorem kennt:

$$Ü_a(\neg\forall t \exists b W_b t).$$

was im fast direkten Widerspruch zu (*) steht, denn per Abschwächung: $M_a(\neg\forall t \exists b W_b t)$ also mit (*): $M_a\bot$

- Noch einmal zu $\forall a \forall t(M_a(\exists b W_b t))$ und ihrem Status:

Die Aussage besagt, dass bezüglich jeder Wahrheit jeder die Disposition hat, auf Befragen es nicht auszuschließen, dass es jemanden gibt, der diese Wahrheit kennt.
Die Aussage besagt nicht, dass jeder jede Wahrheit *als solche* erkennt und dann sagt, dass es jemanden gibt, der sie kennt, denn das wäre trivial. [Warum?]
Die Aussage ist kein Theorem, kann also falsch sein. Es gibt Modelle von Subjekten, wo jemand von einer Wahrheit sagt, sie sei falsch, also auch verneint, dass sie jemand kennt.
Die Aussage ist möglicherweise wahr: Es gibt ein Modell, in dem kein Subjekt irgendwelche den Wahrheiten widersprechende Meinungen hat, also von jeder …

Offene Fälle des $M_a p$

• Viele epistemologischen Zusammenhänge sind nicht festgelegt.

• Beispiel:

Wenn man glaubt, dass niemand *p* weiß, kann man *p* für möglicherweise wahr halten oder es lassen, d.h.

$$\nvdash G_a \neg \exists b W_b p \supset M_a p \qquad \text{und} \qquad \nvdash G_a \neg \exists b W_b p \supset \neg M_a p$$

[Warum?]

- $\nvdash G_a \neg \exists b W_b p \supset M_a p$ und $\nvdash G_a \neg \exists b W_b p \supset \neg M_a p$

denn, wenn niemand es weiß, weiß man es selbst nicht: $\neg W_a p$. D.h. $\neg G_a p \vee \neg p$

da man dies nun glaubt: $G_a(G_a p \supset \neg p)$

also [EA]: $G_a G_a p \supset G_a \neg p$

also [AL]: $\neg G_a G_a p \vee G_a \neg p$

- im zweiten Fall folgt $M_a \neg p$, was $M_a p$ ausschließt, also den linken Fall oben abdeckt;

- im ersten Fall gilt aufgrund von Introspektion und Konsistenz $\neg G_a p$, was sowohl $\neg M_a p$ als auch $M_a p$ zulässt, wobei letzteres den rechten Fall oben abdeckt.

Eine Definition des Für-möglich-Haltens

- Im Anschluss an die Idee von *Credulity* ließe sich auch eine liberale *partielle* Definition des Für-möglich-Haltens geben: man hält alles für möglich, dessen Gegenteil man nicht glaubt.
- In unserem System könnten wir dafür einführen:

Axiom $\vdash \neg G_a \neg p \supset G_a \Diamond p$

- Die Kontraposition ist ebenfalls plausibel:

$$\vdash \neg G_a \Diamond p \supset G_a \neg p$$

denn wenn man nicht glaubt, dass es eine mögliche Welt gibt, so dass *p*, ist „p“ auch nicht in der aktualen Welt wahr.

- Die Konverse des Axioms $\vdash \neg G_a \neg p \supset G_a \Diamond p$

d.h.

$$G_a \Diamond p \supset \neg G_a \neg p$$

gilt natürlich nicht. [Warum?]

- $\not\models G_a\Diamond p \supset \neg G_a\neg p$

denn, dass man *p* für in irgendeiner Welt für möglich hält, schließt nicht aus, dass man überzeugt ist, dass *p* nicht der Fall ist.

- Ebenfalls konsistent ist: $G_a\Diamond p \wedge W_a\neg p$

Man kann das Gegenteil von dem, was man weiß, dennoch für möglich halten.

- Der Witz von modalen Annahmen liegt ja oft gerade in kontrafaktischen Annahmen, also dem Einräumen von Möglichkeiten im Widerspruch zu dem was wir wissen oder für wahr halten.

• „$G_a \Diamond p \supset \neg G_a \neg p$“ kann schon deswegen nicht gelten, da wir ansonsten

(**) $\quad G_a \Diamond p \equiv \neg G_a \neg p$

hätten, was mit dem Theorem

$$\vdash M_a p \equiv \neg G_a \neg p$$

hieße

(***) $\quad G_a \Diamond p \equiv M_a p$

was wir ja als falsch erkannt haben (die beiden Modalitäten mussten getrennt werden).

- Mit der Definition von „M“ und obigen Axiom

$$\vdash \neg G_a \neg p \supset G_a \Diamond p$$

gilt also:

$$\vdash \neg G_a \neg p \supset M_a p \wedge G_a \Diamond p$$

Dies ist nicht verwunderlich, insofern wir etwas, das wir für möglicherweise wahr halten auch für möglich halten sollten. Es gilt ja (minimales l-Wissen):

$$\vdash M_a p \supset M_a \Diamond p$$

- Gilt nun auch

(****) $M_a p \supset G_a \Diamond p$

[Welche Probleme wirft dies auf?]

- Hätten wir

$$M_a p \supset G_a \Diamond p$$

würde sich die zugelassene Inkonsistenz im Skopus von „M" auch auf „G" ausdehnen, denn aus

$$M_a(p \wedge \neg p)$$

was sich per Konjunktivität schnell ergeben kann, folgt dann

$$G_a \Diamond (p \wedge \neg p)$$

was die Annahme inkonsistenter möglicher Welten erfordert.

- Diese ergeben sich allerdings logisch sowieso wegen

$$M_a(p \wedge \neg p) \supset M_a \Diamond (p \wedge \neg p)$$

- Eine allgemeine Aufgabe von Konsistenzprinzipien könnte sich insofern anbieten, da sie für Glauben nicht weniger unrealistisch sind, wie für Für-möglicherweise-wahr-Halten.
- Zur Erinnerung: Konsistenz wird nur *im Skopus* epistemischer Zustände aufgegeben.
- Geben wir Konsistenz auch für „G“ auf, könnten wir evtl. auf das Axiom

$$\vdash \neg G_a \neg p \supset G_a \Diamond p$$

verzichten zugunsten eines anderen Axioms:

$$\vdash M_a p \supset G_a \Diamond p$$

was – wie oben erwähnt – *prima facie* plausibel ist.

Innere und Äußere Logik

- Noch einmal zur zugelassenen Inkonsistenz. Die hier vorgestellte Epistemische Logik ist eine Erweiterung der Standard-PL1, also konsistent. Dies ist die *Äußere Logik* der Aussagen *über* epistemische Zustände. Etwa:

$$G_a\neg p \wedge G_a\Diamond p \supset \exists b\, G_b\neg p$$

- Diese Äußere Logik müsste eine parakonsistente Logik sein, wenn wir eine hinreichend ausdrucksstarke Sprache (für z.B. semantische Begriffe) hätten. Davon war hier zunächst nicht die Rede.

- Die zugelassene Inkonsistenz betraf epistemische Zustände, d.h. die Inkonsistenzen treten im Skopus der epistemischen Operatoren auf. Die entsprechende *Innere Logik* (d.h. die Logik mittels derer epistemische Subjekte Epistemische Abtrennung vornehmen) muss (i.d.R.) eine *parakonsistente* Logik sein, insofern wir nicht von Widersprüchen auf Beliebiges schließen.

- l-Wissen, das wir hier epistemischen Subjekten zusprechen umfasst *Teile* einer parakonsistenten Logik.

- Wir *können* einzelnen epistemischen Subjekten – wie realistisch dies auch immer sein mag – auch ‚explosives' logisches Wissen zuschreiben – deren Unvorsicht eben.

Theoreme des Für-möglich-Haltens

- Aus der Kontraposition des Axioms, d.h.

  $\vdash \neg G_a \Diamond p \supset G_a \neg p$

  folgt

  $\vdash \neg G_a \Diamond p \supset G_a W_a \neg p$

Was man nicht für möglich hält, dessen Gegenteil glaubt man zu wissen.

[Warum?]

- $\vdash \neg G_a \Diamond p \supset G_a W_a \neg p$

ergibt sich aus Zugänglichkeit, Distribution und Wissensdefinition: $\neg G_a \Diamond p$, also $G_a \neg p$, also $G_a G_a \neg p$, also $G_a(G_a \neg p \wedge \neg p)$.

- Ebenfalls trivialerweise: $\vdash G_a p \supset G_a \Diamond p$

Unentschiedenheit und Nichtwissen

- „$p \wedge G_a \Diamond \neg p$“ sollte man nicht wie „$p \wedge G_a \neg p$“ als Ausdruck von Ignoranz verstehen, da ja $G_a p$ nicht ausgeschlossen wird.
- Wenn man zu etwas keine Meinung hat, d.h.

$$\neg G_a p \wedge \neg G_a \neg p$$

hält man beides für möglich

$$\vdash \neg G_a p \wedge \neg G_a \neg p \supset G_a \Diamond p \wedge G_a \Diamond \neg p$$

- $\not\models \neg G_a p \wedge \neg G_a \neg p \supset M_a p \vee M_a \neg p$

Dies scheitert daran, dass nirgendwo die Maximalität eines epistemischen Zustandes gefordert wird, d.h. für jeden epistemischen Zustand φ ist $\neg\varphi_a p \wedge \neg\varphi_a \neg p$ konsistent.

Mit $\neg G_a p$ folgt $\neg M_a p$, damit aber *nicht* $M_a \neg p$; entsprechend für $\neg G_a \neg p$.

$$\vdash \neg G_a p \wedge \neg G_a \neg p \supset \neg M_a p \wedge \neg M_a \neg p$$

Kombinierte Modalitäten

- Gegeben, dass man mit $G_a \Diamond p$ eine alethische Modalität im Skopus einer epistemischen eingeführt hat, sollte es in einem kompletten System epistemischer Zustände auch Regeln der alethischen Modallogik geben. Mindestens:

Axiom $\vdash \Box p \supset p$

Axiom $\vdash \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$

Regel $\vdash \alpha \Rightarrow \vdash \Box\alpha$

Necessitation [$\Box$E] ist für (logisch-semantische) Notwendigkeit unproblematisch.

• Ebenfalls gelten hier die Iterationsaxiome

S4 $\Box p \supset \Box\Box p$

S5 $\Diamond p \supset \Box\Diamond p$ $[\equiv \neg\Box p \supset \Box\neg\Box p]$

S4 entspricht der positiven, S5 der negativen Introspektion.

• Quantifikationsprinzipien hängen auch von semantischen Annahme (etwa konstanter oder relativer Domains) ab. Hier gelten bei relativen Domains (der möglichen Welten):

Axiom $\vdash \Box\forall x\, F(x) \supset \forall x\, \Box\, F(x)$

Theorem $\vdash \exists x\, \Diamond\, F(x) \supset \Diamond\, \exists x\, F(x)$

während die Konversen (Barcan-Formeln) nicht gelten.

[Das Theorem ergibt sich per Kontraposition mittels $\forall/\exists$ und $\Box/\Diamond$.]

Notwendiges Wissen *vs.* Wissen von Notwendigkeiten

• Alle Axiome und Theoreme der epistemischen Logik können natürlich necessitiert werden: $\vdash \Box\forall a \exists t\, W_a t$ usw.

• Mittels des $\Box\forall$-Axioms folgt: $\vdash \forall a\, \Box\, \exists t\, W_a t$

• Wir können – mindestens mit l-Postulaten – den Subjekten Wissen über die Notwendigkeit der Theoreme zuschreiben:

$$\forall a\, W_a(\Box(p \supset p \vee q)) \qquad \text{usw.}$$

Dies ist Wissen *von* Notwendigkeiten.

- Aufgrund einer ähnlichen Überlegung gibt es auch *notwendiges Wissen*. [Warum?]

• $\vdash \exists t \Box \forall a \, W_a t$

denn [Axiom]: $\vdash \forall a \, W_a(p \vee \neg p)$
also [$\Box$E]: $\vdash \Box \forall a \, W_a(p \vee \neg p)$
also [$\exists$E]: $\vdash \exists t \Box \forall a \, W_a t$

• $\vdash \exists t \forall a \Box W_a t$

aus dem vorherigen Theorem mit $\Box\forall$-Axiom.

• Während einiges mit Notwendigkeit gewusst wird, *kann* anderes offensichtlich nicht gewusst werden. Wie steht es um:

$$\neg \exists t \Diamond \exists a \, W_a \neg t$$

[Muss das wahr sein?]

- $\exists t \diamond \exists a\, W_a \neg t$

mag noch wahr sein können, wenn das, was jetzt der Fall ist, in einer *anderen* möglichen Welt falsch ist.

$$\Box p \supset \neg \diamond \exists a\, W_a \neg p$$

gilt hingegen trivialerweise (wegen Veritativität).

Modale Theoreme der Nichtallwissenheit

• Mit den modalen Prinzipien ergeben sich aus dem Axiom der Nichtallwissenheit $\vdash \forall a\, \exists t\, \neg W_a t$ modale Theoreme:

$\vdash \Box \forall a\, \exists t\, \neg W_a t$ [$\Box$E]

$\vdash \neg \Diamond \exists a\, \forall t\, W_a t$ [$\Box/\Diamond$, $\forall/\exists$]

$\vdash \forall a\, \Box\, \exists t\, \neg W_a t$ [$\Box\forall$]

$\vdash \neg\, \exists a\, \Diamond\, \forall t\, W_a t$ [$\Box/\Diamond$, $\forall/\exists$]

[Was ist der Unterschied zwischen dem zweiten und vierten Theorem?]

• Das zweite Theorem schließt die Möglichkeit aus, dass jemand alles weiß (d.h. niemand ist allwissend). In keiner möglichen Welt gibt es einen Allwissenden.

Das vierte Theorem schließt aus, dass jemand möglicherweise alles weiß. Es gibt niemanden, der in *irgendeiner* Welt allwissend ist.

Dies besagt scheinbar wesentlich mehr bzw. macht Annahmen über ‚counterparts' und die Komplexität von Welten. Könnte ich z.B. etwas wissen über die Wahrheiten einer Welt, ohne selbst dort zu sein, und gibt es eine Welt, die sehr einfach ist (es gibt etwa keine Dinge), kann das vierte Theorem nur wahr sein, weil ich nicht alle logischen Wahrheiten kenne. (Das entspricht dann eben Theorem 2.)

Prinzipielles Nichtwissen

• Gibt es prinzipielle Wissensgrenzen [Kap. 7, 8], gilt für sie mehr, nämlich:

$$\forall a \, \exists t \, \Box \, \neg W_a t$$

$$\neg \exists a \, \forall t \, \Diamond \, W_a t$$

Der erste Satz besagt, dass es mindestens *einen bestimmten* Satz gibt, den man notwendigerweise nicht weiß (also nicht wissen kann).
Der zweite Satz, der daraus folgt, besagt, dass es somit nicht einmal für jemanden *möglich* ist, alle Wahrheiten zu wissen.

Vorstellbarkeit

• Neben ‚Intuitionen' steht ‚Vorstellbarkeit' hoch im Kurs der Sorte von (analytischer) Philosophie, die oft mit Gedankenexperimenten arbeitet. Im Hintergrund steht oft die These, dass alles, was vorstellbar ist, auch möglich ist. Diese These krankt nicht nur an der Unklarheit von „möglich", sondern vor allen an der von „vorstellbar".

• Oft wird diese These ‚Humes These' genannt, insofern Hume oft die Gleichsetzung vornimmt. Sie kommt auch bei Herbert Spencer vor. Formalisiert evtl. so:

$$\text{(HT)} \qquad Vp \supset \Diamond p$$

- Frege lehnte die These ab, da Möglichkeit objektiv, jedoch Vorstellbarkeit eine subjektive Modalität sei. Damit eine Verbindung zwischen Möglichkeit und Vorstellbarkeit bestehen kann, muss man also entweder Möglichkeit subjektivieren zu „für möglich halten“ oder Vorstellbarkeit generalisieren zu „für irgendeinen Geist vorstellbar“.
- Gegen die erste Strategie spricht, dass falsch sind

$$\Diamond p \equiv \forall a\ M_a p$$

$$\Diamond p \equiv \exists a\ M_a p$$

[Warum sind diese Sätze falsch?]

[Warum spricht das gegen die erste Strategie?]

• „$M_i p$“ betrifft mein für möglicherweise wahr halten. Es kann objektive Möglichkeiten (sogar logische Wahrheiten) geben, die von niemanden für möglichlicherweise wahr gehalten werden. (Logische Allwissenheit gilt nicht.)

• „$G_i \Diamond p$“ hilft hier auch nicht weiter, sondern macht die Differenz zwischen Möglichsein und für möglich gehalten werden noch deutlicher.

• Solche Formeln sprechen gegen die erste Strategie, insofern der Übergang von „$\Diamond p$“ zu „$M_a p$“ einfach *das Thema wechselt* (von Möglich*sein* zu Für-möglicherweise-wahr-*Gehalten*werden).

- Eine Objektivierung von Vorstellbarkeit könnte sein:

    Definition $\quad Vp \overset{\text{def}}{=} \Diamond \exists a W_a \Diamond p$

Damit gilt: $Vp \supset \Diamond p$ [Warum?]

- $\vdash Vp \supset \Diamond p$

denn angenommen: $\Diamond \exists a W_a \Diamond p$

also [∃B]: $\Diamond W_a \Diamond p$

also [Veritativität]: $\Diamond \Diamond p$

also [S4]: $\Diamond p$

- Die Konverse

$$\Diamond p \supset Vp$$

gilt indessen immer noch nicht.

[Warum?]

• Gegeben was wir eben über Nichtallwissenheit gesagt haben:

$$\forall a\ \exists t\ \Box\ \neg W_a t$$

Kann

$$\Diamond p \supset \Diamond \exists a W_a \Diamond p$$

nicht gelten. Die nicht wissbare Wahrheit ist eine nicht wissbare Möglichkeit (es gilt [T]: $p \supset \Diamond p$), also:

$$\vdash \forall t\ \Diamond t$$

also: $\forall a\ \exists p\ (\Diamond p \wedge \Box\ \neg W_a p)$

• Die Gleichsetzung von Möglichkeit und objektivierter Vorstellbarkeit mittels [Df. „V“] scheitert daher.

• Freunde von Gedankenexperimenten (zu Zombies, Twin-Earths etc.) benötigen i.d.R. nur die Richtung von Vorstellbarkeit auf Möglichkeit.

• Wir haben gesehen: $\vdash Vp \supset \Diamond p$. Heißt dies, dass wir hier die entsprechenden Argumente der Vorstellbarkeits-apologeten akzeptieren müssen?

• Keineswegs, denn gegeben die Definition besagt Vorstellbarkeit hier: $\Diamond \exists a W_a \Diamond p$. Offensichtlich geht hier schon die Modalität der *Möglichkeit* ein. Die Frage nach der Vorstellbarkeit von Zombies etc. reduziert sich also direkt auf die Frage, ob Zombies etc. mögliche Gegenstände des Wissens sein können, also *möglich* sein können.

• Ob Zombies etc. mögliche Gegenstände des Wissens sein können, also *möglich* sein können, ist eine semantische Frage, die mit den analytischen Wahrheiten bezüglich unserer Sprache zusammenhängt (bzgl. „Zombie", „Bewusstsein" etc.). Der Rekurs auf Vorstellbarkeit ist bestenfalls ein Umweg.

• Ich kann mich *bildlich* an einen Zeichentrickfilm mit sprechenden Löffeln erinnern. Ich kann das Kinderbuch vom Löffel Leopold malen, in dem dieser spricht. Aus diesen bildlichen ‚Vorstellungen' folgt nichts für semantische Möglichkeit. Ich kann auch das Kinderbuch von der Kratzbürstigen Konjunktion malen, die nicht bei eigener Wahrheit die beide ihrer Konjunkte einräumt.

• Jenseits bildlicher Vorstellungen ist ‚Vorstellung' mehr als unklar. „Vorstellung" gehört ganz oben auf die Liste der philosophisch zu inkriminierenden Ausdrücke.

• Ein substantieller Begriff von Vorstellung im Sinne der Apologeten von Humes These (d.h. einer, der die Kratzbürstige Konjunktion ausschließt, aber evtl. so etwas wie den Löffel Leopold zulässt) wurde bisher nicht geliefert.

• Damit bleibt

$$\vdash Vp \supset \Diamond p$$

bestenfalls ein Desiderat.