EPISTEMISCHE LOGIK

Grundlagen

Opazität

Manuel Bremer
University of Düsseldorf, Germany
www.mbph.de

Quantoren und epistemische Operatoren

- Gegeben Quantoren in der Sprache der epistemischen Logik, kann man sich fragen, ob etwa epistemische Operatoren über Quantoren distribuieren.
- Man betrachte folgendes Prinzip

$$\forall x W_a F(x) \equiv W_a \forall x F(x)$$

[Gilt dies?]

- Man muss hier zwischen distributiven und kollektiven Wissen (bezüglich einer Menge) unterscheiden:
- Kollektiv über alle wissen: $W_a \forall x(x \in F \supset H(x))$
- Distributiv über alle wissen: $\forall x\, W_a(x \in F \supset H(x))$
- In beiden Fällen wird etwas über die Gesamtheit gewusst, aber nur im ersten Fall handelt es sich um bezüglich dieser Gesamtheit abgeschlossenes Wissen. Im ersten Fall meint man etwas über die Gesamtheit. [Vgl. Russells Unterscheidung zwischen ‚classes in the distributive sense', i.e. ‚as many' *vs.* ‚as one'.]
- $\forall x W_a F(x) \supset W_a \forall x F(x)$ wird also nicht gelten können.
- $W_a \forall x F(x) \supset \forall x W_a F(x)$ muss per Abschluss gelten.

- Wir haben also für einen epistemischen Kontext φ

Theoremschema $\vdash \varphi_a \forall x F(x) \supset \forall x \varphi_a F(x)$

Begründung:

angenommen: $\varphi_a \forall x F(x)$

minimales logisches Wissen: $\varphi_a(\forall x\, F(x) \supset F(u))$

also [EA]: $\varphi_a F(u)$

also [$\forall$E]: $\forall x \varphi_a F(x)$

Wissens bezüglich von Gesamtheiten

- Hier lassen sich einige Beobachtungen anschließen.
- So werden wir für alle empirisch nicht überschaubaren Mengen i.d.R. nur kollektives Gesamtheitswissen haben (etwa, dass alle Katzen Raubtiere sind) aber nicht distributives Gesamtheitswissen (weil wir schlicht nicht alle Katzen kennen).
- Es gibt auch eine Unterscheidung zwischen generischem Wissen und konkreten Wissen:

$$W_i((\exists x \in F)H(x)) \qquad \textit{vs.} \qquad (\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x))$$

- Beim konkreten Wissen $(\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x))$ weiß ich von einem bestimmten Objekt aus *F*, dass es *H* ist. Also habe ich, sofern ich „∃" verstehe, auch generisches Wissen:

$$\vdash (\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x)) \supset W_i((\exists x \in F)H(x))$$

- Die Umkehrung scheint epistemisch problematisch: Nur weil ich weiß, dass es (irgendwo) ein *F* gibt, das *H* ist, kann ich deswegen noch lange nicht eines benennen (oder muss ein konkretes kennen).

[Ist sie auch logisch problematisch? D.h. gilt:

$$W_i((\exists x \in F)H(x)) \supset (\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x)) \quad ?]$$

Ein Problem der Modellierung von Quantoren?

• $(\exists B)$ scheint problematisch in epistemischen Kontexten. Wir haben epistemologisch den Umstand der Nichtinstantiierbarkeit:

$$W_i((\exists x \in F)H(x)) \wedge \neg(\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x))$$

diese Konjunktion *scheint* epistemologisch konsistent.

• Logisch haben wir das Problem, dass wir mit $(\exists B)$ vom linken Konjunkt auf $W_i(u \in F \wedge H(u))$ schließen, was mit $(\exists E)$, also *Quantifying-in*, $(\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x))$, unmittelbar dem rechten Konjunkt widerspricht.

• Müssen wir $(\exists B)$ irgendwie beschränken?

• Das würde nicht nur die Modellierung verkomplizieren, es ist fraglich, ob hier ein epistemologisches Problem vorliegt. Das mit „$W_i((\exists x \in F)H(x))$" beschriebene Wissen wird *objektiv* (von außen) festgestellt. Also kann man – mich eingeschlossen – von außen darüber räsonieren. $(\exists B)$ heißt, eine Chiffre für irgendein passendes Objekt einzuführen, das es nach Annahme, gibt, also: $(\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x))$.

• Das Missverständnis liegt darin „$(\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x))$" nicht *de re* zu lesen, d.h. einen *mir bekannten* Namen zu unterstellen bzw. zu postulieren. Der Übergang von einer solchen *de re* Lesart zu einer introspektiven misslingt.

• Kurz gefasst: Wenn ich *weiß* irgendetwas ist ϕ, gibt es *irgendetwas*, das ϕ ist, also irgendetwas, *von dem* ich ϕ weiß.

Also gilt:

$$W_i((\exists x \in F)H(x)) \supset (\exists x)W_i(x \in F \wedge H(x))$$

bzw. allgemein:

$$\vdash W_a(\exists x H(x)) \supset (\exists x)W_a(H(x))$$

(Der Beweis über ($\exists$B) wurde oben erwähnt.)

• Für Wissen gilt also:

$$\vdash W_a(\exists x H(x)) \equiv (\exists x)W_a(H(x))$$

Quantifying-in

- *Quantifying-in* gilt natürlich für Wissen:

  $\vdash W_i F(u) \supset \exists x W_i F(x)$

[Warum?]

[Wie ist es mit den anderen epistemischen Zuständen?]

- Da Glauben nicht veritativ ist, kann ich über etwas, das es nicht gibt, etwas glauben:

$$\nvdash G_i F(u) \supset \exists x G_i F(x)$$

- Dies semantisch modellieren zu können verlangt (i) die Quantoren auf Existentes zu beschränken und (ii) eine Semantik mit einer *outer domain* des Nichtexistenten zu haben – wie etwa in einer Freien Logik.

Opazität

- Seit Frege unterscheidet man Kontexte, in denen ko-referentielle Ausdrücke für einander ausgetauscht werden können von solchen, in denen das nicht (direkt) der Fall ist.
- Das paradigmatische Beispiel dafür sind ‚propositionale Einstellungen‘, unter diesen auch die epistemischen Einstellungen.

- (1) Peter meint, Arjen schoss das Tor.

  (2) Peter meint, der Spieler mit der Rückennummer 10 schoss das Tor.

Auch wenn Arjen der Spieler mit der Rückennummer 10 ist, kann man nicht von (1) zu (2) übergehen, da nicht sicher ist, ob Peter von diesem Umstand weiß.

- Diese Opazität hat Konsequenzen für Einsetzungsregeln, wobei man doxastische Kontexte im engeren Sinne von Wissenszuschreibungen unterscheiden muss.

Starre und nicht-starre Ausdrücke

- Im Folgenden seien unterschieden: starre ko-referentielle Ausdrücke (typischerweise Eigennamen und Prädikatoren) und Kennzeichnungen. (In der Regel werden wir im Folgenden von nicht-starren Prädikatoren absehen.)
- Prädikatoren können dann nicht-starr sein, wenn in ihre Identifikation Indexikalität bzw. Situationsbezug eingeht (etwa „( ) hat genau die Tonhöhe in welcher der Sprecher gerade spricht“).

• Grundsätzlich sollten sich starre Ausdrücke immer für einander einsetzen lassen – aber eben nicht in epistemischen Kontexten:

(3) Petra meint, dass Cicero ein Redner war.

(4) Petra meint, dass Tulius ein Redner war.

Selbst wenn die Eigennamen „Cicero“ und „Tulius“ starre Ausdrücke sind, welche denselben Gegenstand bezeichnen, lässt sich nicht immer von (3) zu (4) übergehen, da Petra dies nicht wissen muss.

Wissenskontexte

• Kontexte, in denen Wissen zugeschrieben wird, *können* als *transparent* angesehen werden:

(5) Petra weiß, dass Cicero ein Redner war.

(6) Petra weiß, dass Tulius ein Redner war.

denn Petra weiß etwas, was der Fall ist und dieses (was der Fall ist) muss *beschreibungsunabhängig* der Fall sein.

[Wann kann von (3) zu (4) übergehen?]

De re und *de dicto*

• Insofern das Wissen von außen zugeschrieben wird, *kann* man Petra mit (5) *oder* mit (6) beschreiben, unabhängig davon, ob Petra weiß, dass Cicero = Tulius.

Solche Zuschreibungen sind in der Regel *de re*.

• Eine *de re* Lesart von Petras Meinungen erlaubt auch den Übergang von (3) zu (4). Beanspruchen *wir* etwas über Petras epistemische Zustände des Meinens zu behaupten, die wir wissen, dass Cicero = Tulius, haben wir den Übergang von (3) zu (4).

- Wenn dies als problematisch angesehen wird, handelt es sich um eine Zuschreibung *de dicto*. Bei solchen Zuschreibungen machen wir auch Annahmen, welche Sätze genauer Petra denn glaubt. Lesen wir (3) *de dicto*, können wir nicht einfach zu (4) übergehen, da es sich um verschiedene Komplementsätze handelt.

- Insofern in Wissen Glauben eingeht, gibt es auch eine *de dicto* Lesart von Wissenszuschreibungen. In dieser verbietet sich unter Umständen der Übergang von (5) zu (6). In der Regel wird man Wissenszuschreibungen im Unterschied zu Meinungszuschreibungen aber nicht *de dicto* verstehen.

Nochmals Propositionen

• Gegeben das Vorkommen von *de dicto*-Konstruktionen (selbst von ‚Wissen'), sind Theorien von Propositionen (und propositionalen Einstellungen) in denen Propositionen so etwas wie Tupen von Entitäten sind (etwa ein Tupel aus einer Person und der Eigenschaft Rednersein) problematisch, da Tupel *transparent* sind.

• Epistemische Einstellungen können keine Relationen zu transparenten Propositionen sein!

- Auch insofern bietet es sich an, ‚propositionale' Einstellungen besser als Beziehungen zu Sätzen (irgendeiner Sprache) aufzufassen.
- Die transparenten Propositionen in den Nebensätzen von (3) und (4) sind identisch, aber nicht die Sätze.
- Analog argumentiert können Propositionen auch keine Mengen von möglichen Welten sein, da solche Mengen transparent in ihren Elemente sind, und die möglichen Welten sind transparent bezüglich der vorkommenden Entitäten.

Beschränkungen von (=B)

- Einsetzen von Identischem (bei singulären Termen), also die Regel der Identitätsbeseitigung muss also eingeschränkt werden:

(i) $u = v, \varphi(u) \vdash \varphi(v)$

wenn φ *kein* epistemischer Kontext ist

(ii) $\psi(u = v), \psi\varphi(u) \vdash \psi\varphi(v)$

wenn ψ *derselbe* epistemische Kontext ist

- Beispiele:

(7) $2 = 3\text{-}1, \sqrt{4} = 2 \vdash \sqrt{4} = 3\text{-}1$

(8) $2 = 3\text{-}1, M_a(\sqrt{4} = 2) \nvdash M_a(\sqrt{4} = 3\text{-}1)$

(9) $M_i(2 = 3\text{-}1), M_i(\sqrt{4} = 2) \vdash M_i(\sqrt{4} = 3\text{-}1)$

- Caveat: (i) und (ii) sind *mutmaßlich* nicht vollständig.

[Warum ?]

Grenzen dieser Formalisierung

- (i) und (ii) sind *mutmaßlich* nicht vollständig.
- Klausel (i) – die normale Identitätsbeseitigung – betrifft alle Kontexte, die nicht epistemisch sind.
- Klausel (ii) behandelt insbesondere die Schwierigkeiten mit *de dicto* Lesarten. Epistemische Kontexte werden für die Identitätsbeseitigung geöffnet, indem eine zusätzliche epistemische Annahme eingehen muss (etwa: $G_a(u=v)$).
- Was ist aber mit *de re* Lesarten von Glauben?

• Die üblichen Formalismen erlauben zwar bei quantifizierten Sätzen eine klare *de re*/*de dicto*-Unterscheidung

(1) $\exists x G_a F(x)$

(2) $G_a \exists x F(x)$

aber nicht bei Sätzen mit Konstanten

(3) $G_a F(u)$

• Zusätzlich besteht folgender Problemfall: wenn $W_a(u=v)$, $Ü_aF(u)$ sollte eigentlich $Ü_aF(v)$ gelten. Gegeben eine Definition gewissen Wissens:

$$W_a p \stackrel{\text{def}}{=} Ü_a p \wedge p$$

reicht (ii) in unserem Problemfall aus. [Warum?]
Gegeben die plausiblere Definition ‚schwachen' Wissens:

$$W_a p \stackrel{\text{def}}{=} G_a p \wedge p$$

reicht (ii) nicht. [Warum?]

• Trotzdem ist die zweite Wissensdefinition vorzuziehen. Der Problemfall mit $Ü_aF(u)$ erfordert dann eben auch einen starken Glauben (eine Überzeugung) bezüglich $u = v$.

Geglaubte Identitäten

- Opazität besagt also, dass wir bei (=B) eine Form von Epistemischer Abtrennung vornehmen können, gegeben geglaubte Identitäten $G_a(u = v)$. Das entspricht (ii) oben.

De re-Annahmen

- Um *de re*-Substitutionen zu erlauben, können wir besondere epistemische Annahmen einführen, die *de re* sind, etwa:

$$\exists x(G_a(x = cicero))$$

- Dann lässt sich räsonieren:

$$\exists x(G_a(x = cicero))$$
$$G_a(F(cicero))$$
$$\text{also: } \exists x(G_aF(x))$$

Hier ist somit *Quantifying-in* erlaubt.

Iterierte Modalitäten und *Quantifying-in*

• Offen bezüglich (ii) bleibt zunächst auch, wie Fälle zu behandeln sind, bei denen innerhalb des epistemischen Kontextes ψ weitere/andere epistemische Kontexte auftreten. Hier stellen sich Fragen nach dem logischen Wissen des entsprechenden Subjektes bzw. des von diesem einen anderem Subjekt zugeschriebenen logischen Wissens.