EPISTEMISCHE LOGIK GRUNDLAGEN

Basale Prinzipien

Manuel Bremer
University of Düsseldorf, Germany
www.mbph.de

Wissen ist veritativ

- Man kann nur wissen, was der Fall ist: $W_a p \supset p$

Oder: $W_a p \supset (\exists t) p \equiv t$

Dies entspricht dem Modalaxiom $\Box p \supset p$

Als **Axiom** $\vdash W_a p \supset p$ [d.h. $\vdash (\forall p)(\forall a)(W_a p \supset p)$]

- Nichtwissen hat zwei Formen:

  $\neg W_a p$ – harmlos wenn *p* sowieso nicht der Fall ist

  $p \wedge \neg W_a p$ – eigentlicher Fall des Nichtwissens

Endliche epistemische Subjekte

- Gezielt wird auf eine Modellierung von epistemischen Subjekten, die endlich lange Zeit zum Räsonieren besitzen und über endliche Speicherkapazitäten verfügen – wie menschliche Personen mutmaßlich (jedenfalls im Diesseits).
- Damit können wir feststellen:

$$\neg(\exists a)(\forall t)W_a t$$

Begründung?

$\vdash \neg(\exists a)(\forall t)W_a t$

denn die Menge der Wahrheiten ist unendlich:

$p \supset p,\ p \supset p \vee p_2,\ p \supset p \vee p_3,\ \ldots$

Ein endliches Subjekt kann sie also nicht gleichzeitig wissen, da es sie nicht gleichzeitig repräsentieren kann.

- Positiv gewendet (als Nichtallwissenheitsaxiom):

Axiom $\vdash(\forall a)(\exists t)\neg W_a t$

[Bei welcher Lesart von Glauben (Aktvollzug *vs*. Disposition) ist dieses Argument überzeugender?]

• Das Argument über die unendliche Anzahl der Sätze (und damit der Wahrheiten einer Sprache) scheint schwächer, sofern wir Glauben als Disposition betrachten (also nicht alle Wahrheiten *gleichzeitig* bedenken müssen).

Dennoch sind einige Sätze *zu lang*, um sie überhaupt bedenken zu können. D.h. auch wenn wir – wie hier – epistemische Zustände als Dispositionen auffassen, sprechen Komplexitätsüberlegungen zu Sätzen und mentalem Arbeitsspeicher für das Nichtallwissenheitsaxiom.

[Kap. 8 kommt auf dieses Problem und eine scheinbare weitere Schwäche des Argumentes zurück.]

Wir meinen zu wissen, was wir behaupten

- Wir können “$\vdash$” auffassen als Ausdruck der Beweisbarkeit (sei es als Axiom oder als Theorem). Weiter verstanden kann „$\vdash$“ alles betreffen, was wir (unumstößlich) behaupten.
- Insbesondere im letzteren Sinne sollte gelten, dass wenn wir etwas behaupten, wir auch behaupten, dass wir es wissen:

$\vdash p \Rightarrow \vdash W_a p$ bzw.

$\vdash p \Rightarrow \vdash W_i p$

• „$\vdash$“ als Beweisbarkeit im Rahmen einer Logik verstanden (etwa PL1) hieße, dass

$\vdash p \Rightarrow \vdash W_a p$ bzw.

$\vdash p \Rightarrow \vdash W_i p$

Logische Allwissenheit ausdrückt: Jedes Theorem wird (von allen und insbesondere mir) gewusst!

• Logische Allwissenheit in diesem Sinne ist eine sehr starke Idealisierung und darum kontrovers. In der Regel macht eine epistemische Logik diese Idealisierung.

• Hier wird diese Idealisierung *nicht* gemacht! Logische Allwissenheit soll nicht *im Allgemeinen* gelten.

Logische Allwissenheit, Deduktiver Abschluss und Epistemische Konditionalisierung

- Drei Prinzipien(schemata) sind zu unterscheiden für einen der epistemischen Kontexte φ (W/Ü/G/M):

  (i) Logische Allwissenheit: $\vdash p \Rightarrow \vdash \varphi_a p$

  (ii) Deduktiver Abschluss: $\varphi_a p, \vdash p \supset q \Rightarrow \varphi_a q$

  (iii) Epistemische Konditionalisierung:

  $\vdash \varphi_a p \wedge \varphi_a (p \supset q) \supset \varphi_a q$

- (i) und (ii) werden hier abgelehnt.

Epistemische Konditionalisierung

- Der Ausdruck „Epistemische Konditionalisierung“ ist angelehnt an die Rede von Konditionalisierung in der Wahrscheinlichkeitstheorie
[Prob(A/B)=r, B gegeben $\Rightarrow$ Prob(A) = r].

- Hält man das Antecedenz eines Konditionals, das man für wahr hält, für wahr, sollte man das Konsequenz für wahr halten.

- Dies entspricht *Modus Ponens*. Insofern lässt sich auch vom „Epistemischer Abtrennung“ reden, was im Folgenden in der Regel auch geschieht, abgekürzt „EA“.

- Es handelt sich um eine Abtrennung komplett *innerhalb* eines epistemischen Kontextes.

- Es muss also unterschieden werden zwischen

$$W_a p, \vdash p \supset q \Rightarrow W_a q$$

was hier *nicht* angenommen wird,

und

$$W_a p, W_a(p \supset q) \vdash W_a q$$

bzw.

$$\vdash W_a p \wedge W_a(p \supset q) \supset W_a q$$

bzw.

$$\vdash W_a(p \supset q) \supset (W_a p \supset W_a q)$$

was angenommen wird.

- Angenommen

$$\vdash W_a(p \supset q) \supset (W_a p \supset W_a q)$$

ergibt sich aussagenlogisch

$$\vdash W_a p \wedge W_a(p \supset q) \supset W_a q$$

und umgekehrt.

‚Anormale' Epistemische Logik

- ‚Normale' Modallogiken besitzen die Necessitationsregel:

  $\vdash p \Rightarrow \vdash \Box p$

- Eine Epistemische Logik ohne Logische Allwissenheit ist also in diesem Sinne ‚anormal'!

[Modallogiken ohne Necessitation sind schwächer als die ‚Lewis'-Systeme, die mit S0.5 beginnen.]

- Epistemische Konditionalisierung entspricht dem sogenannten K-Axiom: $\vdash \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$.

- Deduktiver Abschluss ergibt sich aus K und Necessitation.

- Abgelehnt werden sollten also aus erkenntnistheoretischen Gründen uneingeschränkte Logische Allwissenheit und uneingeschränkter Logischer Abschluss.
- Alternativ ließe sich „⊢“ auf die Logik (Menge der logischen Regeln) *beschränken*, die ein Subjekt bzw. eine Gruppe von Subjekten *kennt/beherrscht*. In diesem Falle wären einzelne Subjekte/Gruppen unterschiedlich zu modellieren. Was sie teilen sind die basalen Prinzipien (wie $W_a p \supset p$).
- Diese Variante wird im Folgenden nicht verfolgt. Hier soll die Epistemischen Logik sich auf Axiom K (d.h. Epistemische Abtrennung) beschränken.

Variationen Epistemischer Abtrennung

- $W_a p, W_a(p \supset q) \vdash W_a q$ $\quad\quad \vdash W_a p \wedge W_a(p \supset q) \supset W_a q$
- $Ü_a p, Ü_a(p \supset q) \vdash Ü_a q$ $\quad\quad \vdash Ü_a p \wedge Ü_a(p \supset q) \supset Ü_a q$
- $G_a p, G_a(p \supset q) \vdash G_a q$ $\quad\quad \vdash G_a p \wedge G_a(p \supset q) \supset G_a q$

Diese „G“-Variante gilt in probabilistischen Semantiken als problematisch, kann aber dem Prinzip des Schwächsten Kettengliedes folgen (ein Schluss ist genauso gut wie die schwächste Prämisse, muss aber nicht schwächer sein).

- Problematisch *erscheint*: $M_a p, M_a(p \supset q) \vdash M_a q$

[s.u. Kapitel 5]

Information besitzen

- Gegeben die Fragwürdigkeit Logischer Allwissenheit für normale epistemische Subjekte, könnte man einen weiteren epistemischen Zustand in die Modellierung einführen: eine Information besitzen (auch wenn man diese nicht kennt):

  $I_a p$

- Ob Zustände dieser Art erkenntnistheoretisch von Interesse sind, hängt davon ab, ob man Personen modelliert, die introspektiv partiellen bewussten Zugang zu ihrem Wissen haben, oder technische System der Informations-verarbeitung. Von diesen wird hier abgesehen.

- Da Informationszusammenhänge objektiv bestehen und keine Einsicht erfordern, kann hier gelten:

$$I_a p,\ \vdash p \supset q \Rightarrow I_a q$$

Man hat all die Information, die eine Information, die man hat, impliziert.

[Barwise bemerkt an einer Stelle, welche das Problem der Logischen Allwissenheit diskutiert: „Information travels at the speed of logic, knowledge doesn't."]

Propositionales Wissen

- Die Epistemische Logik (EL) befasst sich ausschließlich mit propositionalem Wissen, bzw. propositionalen Kontruktionen von „Wissen, dass“, nicht mit

  (1) Peter weiß die Antwort. [Objektkonstruktion]
  oder
  (2) Petra weiß, wie man Geige spielt [‚Know how‘]

- Viele Fälle der Art von (1) lassen sich in propositionale Form bringen bzw. kürzen eine solche ab.

  (1‘) Peter weiß, dass 2 + 4 = 6. (Horst fragte ihn.)

- Sofern sich *Know How* artikulieren lässt, lassen sich auch Fälle des Typs (2) in propositionale Form bringen. Im Einzelfall – wie im Beispiel hier – scheint dies allerdings problematisch. Welche Sätze sollten genau beschreiben, wie man – im Allgemeinen! – Geige spielt?
- Trotzdem behandelt die EL mit dem propositionalen Wissen die (oder eine der) zentrale(n) Wissensform, mit der sich die Erkenntnistheorie befasst.

Konsistenzprinzipien

- Im Allgemeinen (d.h. Besonderheiten von Paradoxien nicht beachtend) stellen Konsistenzbedingungen minimale Bedingungen für Rationalität dar.

- Man *sollte* nicht (einfach) etwas und sein Gegenteil meinen: $\neg(G_a p \wedge G_a \neg p)$.

Dies (d.h. $G_a p \wedge G_a \neg p$) mag vorkommen, insofern man seine Meinungen nicht komplett überschaut, sollte jedoch nicht.

Wissen ist konsistent

- Im Kontext einer konsistenten Logik muss auch Wissen konsistent sein. [Warum?]

- Angenommen: $W_a p \wedge W_a \neg p$

aufgrund von Veritativität: $p \wedge \neg p$

was aber in einer konsistenten Logik nicht vorliegen kann.

Direkte Konsistenzprinzipien

- In dieser Form treten direkte Konsistenzprinzipien auf:

  Axiom $\vdash G_a p \supset \neg G_a \neg p$ $\quad [\equiv \neg(G_a p \wedge G_a \neg p)]$

Dieses Prinzip drückt eindeutige Festlegung aus.

Daraus folgt: $W_a p \supset \neg W_a \neg p$ [Warum?]

- Entsprechend: $Ü_a p \supset \neg Ü_a \neg p$
- Nicht zwingend *erscheint*: $\neg(M_a p \wedge M_a \neg p)$ [Warum?]

  [Siehe aber Kapitel 5 zu „M“]

Die Rolle der Konsistenz von $\vdash$

- Gegeben eine konsistente Logik: $\nvdash \bot$

Dann können wir auch nicht haben: $W_a p \wedge W_a \neg p$, ebenso wenig $W_a(p \wedge \neg p)$, sowieso nicht $W_a p \wedge \neg W_a p$. [s.o.]

- Gegeben eine inkonsistente Logik erhalten wir mit $\vdash(p \wedge \neg p)$ und einem Abschlussprinzip genau solche Formeln.

Indirekte Konsistenzprinzipien

- Andere Konsistenzprinzipien drücken entweder den Zusammenhang epistemischer Zustände aus, etwa:

$$\neg(Ü_a p \wedge M_a \neg p) \quad [\text{insofern } M_a p \supset \neg Ü_a \neg p]$$

- Konsistent ist $G_a(p \wedge \neg(\exists b)W_b p)$ gegeben etwa eine Begründungskomponente im Wissensbegriff – ohne diese allerdings (d.h. mit dem schwachen Wissensbegriff) scheint sich ein Problem zu ergeben. [Warum?]

- Angenommen: $G_a(p \wedge \neg(\exists b)W_b p)$

also [∃/∀]: $G_a(p \wedge (\forall b)\neg W_b p)$

also [∀B]: $G_a(p \wedge \neg W_a p)$

also [Df. “W“]: $G_a(p \wedge \neg(G_a p \wedge p))$

Kann man dies konsistent meinen?

• Angenommen: $G_a(p \wedge \neg(G_a p \wedge p))$

Mit einem Distributionsprinzip $G_a(p \wedge q) \supset G_a p \wedge G_a q$ und [AL] gilt: $G_a p \wedge G_a(G_a p \supset \neg p)$

also [AL, EA]: $G_a p \wedge (\neg G_a G_a p \vee G_a \neg p)$

also [AL]: $G_a p \wedge \neg G_a G_a p \vee G_a p \wedge G_a \neg p$

also [$\vee$B,Konsistenz]: $G_a p \wedge \neg G_a G_a p$

• $G_a p \wedge \neg G_a G_a p$ widerspricht einem Prinzip der Positiven Introspektion $G_a p \supset G_a G_a p$, das zumindest in einer dispositionalen Lesart von „G“ einige Plausibilität hat.

• Problematischer ist das Distributionsprinzip höchstens in die andere Richtung, sofern man seine Meinungen nicht überblickt: $G_a p \wedge G_a q \supset G_a(p \wedge q)$?

• Wir nehmen weiter unten als Axiom ein **Distributionsaxiom** an, dass man alle Konjunkte einer geglaubten Konjunktion glauben muss:

$$\vdash G_a(p \wedge q) \equiv G_a p \wedge G_a q$$

• Angenommen Positive Introspektion (für „G“) und den schwachen Wissensbegriff ist

$$G_a(p \wedge \neg(\exists b)W_b p)$$

also inkonsistent, d.h. $\vdash G_a p \supset \neg G_a \neg(\exists b)W_b p$

• $G_i p \wedge \neg G_i G_i p$ kann in keinem Fall von mir *behauptet* werden ohne, dass ich mir zu widersprechen scheine (d.h. gegeben minimale Introspektion bei Behauptungen).

Widersprüche der Ersten Person

• Das vorliegende Beispiel weist scheinbar auf die besondere Rolle der Ersten Person und ihrer Behauptungen über sich selbst hin:

$$G_a p \wedge \neg G_a G_a p$$

mag *scheinbar* von außen attestiert werden (also von jemand über mich behauptet werden), aber

$$G_i p \wedge \neg G_i G_i p$$

Lässt sich nicht von mir behaupten.

[Warum „scheinbar“?]

Starke Zuschreibungsprinzipien

• Wenn wir tatsächlich Prinzipien der Positiven Introspektion (u.a.) annehmen, postulieren wir damit auch die Konsistenz *aller* epistemischen Subjekte, d.h.

$$G_a p \wedge \neg G_a G_a p$$

lässt sich – gegeben diese Annahmen – selbst aus der Dritten Person nicht behaupten!

Widersprüche des Behauptens

• Trotz der eingeschränkten Sonderrolle der Ersten Person, gibt es einen Unterschied bei Sätzen, die konsistent von niemand selbst behauptet werden können, die jedoch wahr *sein* können, also eventuell sogar Theoreme eines objektiven Systems mit entsprechender Logik sind.

• $W_i(p \wedge \neg(\exists_a)W_a p)$ ist klarerweise (gegeben Distribution und Veritativität, selbst ohne Introspektion) inkonsistent.

• $p \wedge \neg(\exists_a)W_a p$ kann jedoch *wahr sein*.

[Eine Debatte sogenannter ‚Moore'scher Paradoxien' knüpft hier an.]

Wahrsein vs. Theoremsein

- $p \wedge \neg(\exists_a)W_a p$ kann zwar *wahr* sein, kann allerdings nicht in *jeder* Epistemischen Logik bezüglich einer *bestimmten* Proposition „p“ ein Theorem sein!

[Warum bzw. wann nicht?]

- Angenommen: $\vdash p \wedge \neg(\exists_a)W_a p$

Mit Prinzipien der Logischen Allwissenheit, Veritativität und $\wedge$-Distribution erhalten wir:

$\vdash W_a(p \wedge \neg(\exists_a)W_a p)$

also: $\vdash W_a p \wedge W_a \neg W_a p$

also: $\vdash W_a p \wedge \neg W_a p$ ↯

- Die Endlichkeit der Subjekte müsste also ausgedrückt werden:

$$\vdash (\exists p)(p \wedge \neg(\exists_a)W_a p)$$

[Blockt dies den obigen Beweis?]

• Angenommen: $\vdash(\exists p)(p \wedge \neg(\exists_a)W_a p)$

$(\exists B)$ wäre hier problematisch für ein konkretes *p*, insofern später dieses – per Logischer Allwissenheit – in den Kontext von „W“ rückt.

Logische Allwissenheit kann also in einer Epistemischen Logik, die $\vdash(\exists p)(p \wedge \neg(\exists_a)W_a p)$ als Theorem haben will, nicht uneingeschränkt gelten!

• Eine Epistemische Logik mit Logischer Allwissenheit könnte zwar in der Metasprache sagen, dass es nicht gewusste Wahrheiten gibt, aber nicht im System selbst, solange es keine weiteren Operatoren hierfür gibt.

Prinzipielle Fähigkeiten und Grenzen

- Epistemische Subjekte wissen etwas:

  Axiom $\vdash(\forall a)(\exists p)W_a p$ bzw. $\vdash(\forall a)(\exists t)W_a t$

  Nichtunwissenheitsaxiom [bzw. -theorem, s.u.]

- Kein epistemisches Subjekt ist allwissend:

  Axiom $\vdash(\forall a)(\exists p)(p \wedge \neg W_a p)$ bzw. $\vdash(\forall a)(\exists t)\neg W_a t$

  Nichtallwissenheitsaxiom (s.o.)

Wiederholung weiterer Axiome

- Axiom $\vdash W_a p \supset p$
- Axiom $\vdash G_a(p \supset q) \supset (G_a p \supset G_a q)$

  $\vdash Ü_a(p \supset q) \supset (Ü_a p \supset Ü_a q)$
- Axiom $\vdash Ü_a p \supset G_a p$
- Axiom $\vdash W_a(p \vee \neg p)$

[Das letzte Axiom besagt: Einige Axiome/Theoreme sind Wissenden bekannt, auch wenn keine Logische Allwissenheit gilt. Hingegen kein Axiom, sondern *falsch* ist: $W_a p \vee W_a \neg p$, Wissen ist nicht ‚maximal'.]

- Variante eines Konsistenz-Axioms

$$\vdash G_a p \supset \neg G_a \neg p$$

[Man dies später als Theorem behandeln, wenn man eine andere Variante eines Konsistenzaxioms empfiehlt.]

- Sofern wir eine Modellierung von wirklichen epistemischen Subjekten anstreben, wäre besser auf Konsistenzpostulate zu verzichten. Unsere Meinungen können – mindestens implizit – inkonsistent sein.

- Hier empfiehlt sich also eine parakonsistente Logik, zumindest im Skopus der epistemischen Operatoren. Mindestens muss gelten, dass Subjekte nicht per *ex falso quodlibet* schließen, dies also bei [EA] keine Rolle spielt.

- Verzichtet man auf Konsistenzprinzipien können Widersprüche im Skopus von epistemischen Operatoren auftreten, die Logik, die von entsprechenden epistemischen Zuschreibungen handelt (d.h. die Logik außerhalb der Operatoren) muss *deswegen* nicht parakonsistent sein.

Definitionen

- Def. $W_a p \stackrel{\text{def}}{=} p \wedge G_a p$

  Wissen ist wahre Meinung.

Insbesondere wird also nicht *per se* angenommen, dass Wissen begründet sein muss: man kann zufällig etwas wissen.

[Das ist eine kontroverse erkenntnistheoretische These, die hier nicht weiter diskutiert wird.]

- Def. $M_a p \stackrel{\text{def}}{=} \neg(\exists q)(G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p))$

  Man hält etwas für möglicherweise wahr, wenn man nichts meint, von dem man meint, dass es dieses ausschließt.

- Diese Definition ist eigens zu motivieren und ebenfalls nicht unkontrovers, da nicht ungefährlich [vgl. Kap.5]).

- Aus der zweiten Definition ergibt sich mit dem möglichen Konsistenzaxiom $\vdash G_a p \supset \neg G_a \neg p$ und EA:

$$\vdash G_a p \supset M_a p \qquad \text{[Warum?]}$$

- Angenommen: $(\exists q)(G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p))$

also [∃B]: $G_a q \wedge G_a(q \supset \neg p)$

also [EA]: $G_a \neg p$

also [Konsistenz]: $\neg G_a p$

also [⊃E, Df. „M“]: $\neg M_a p \supset \neg G_a p$

also [AL] $G_a p \supset M_a p$

- In den dritten Schritt geht eine weitere Annahme ein. [Welche?]

l-Theoreme

- Im Weiteren werden einige Theoreme als „l-Theoreme“ bezeichnet. In die Beweise von diesen Theoremen fließen Annahme über das logische Wissen von epistemischen Subjekten ein.
- Einige dieser Theorem werden überflüssig, wenn man entsprechend starke Axiome vorbringt – so bei dem hier gleich diskutierten Fall.

Einige Konsequenzen

- Theorem $\vdash W_a(p \supset q) \supset (W_a p \supset W_a q)$

[Warum?]

- l-Theorem $\vdash G_a(p \wedge q) \supset G_a p \wedge G_a q$

[Warum bzw. wann?]

- Theorem $\vdash \neg p \supset \neg(\exists a)W_a p$

Falschheiten können nicht gewusst werden.

[Warum?]

- $\vdash \neg p \supset \neg(\exists a)W_a p$

aus Veritativiät

- $\vdash W_a(p \supset q) \supset (W_a p \supset W_a q)$

aus Konditionalisierung und Definition des Wissens

- $\vdash G_a(p \wedge q) \supset G_a p \wedge G_a q$

Annahme: $G_a(p \wedge q)$
l-Wissen: $G_a(p \wedge q \supset p)$, $G_a(p \wedge q \supset q)$
also [EA]: $G_a p$
also [EA] : $G_a q$
also [$\wedge$E]: $G_a p \wedge G_a q$
also [$\supset$E]: $G_a(p \wedge q) \supset G_a p \wedge G_a q$

Konjunktivität

• Wie verhält es sich mit der Konversen des gerade betrachteten l-Theorems?

$$G_a p \wedge G_a q \supset G_a(p \wedge q)$$

Auf der einen Seite scheint es zweifelhaft, dass wir (bewusst) alle unsere Meinungen überblicken, auf der anderen Seite sollten wir sie auch zusammen für wahr halten.

• Auch bei der Bildung der Konjunktion ließe sich ein entsprechendes l-Theorem formulieren. [Wie?]

- Das Bilden der Konjunktion ergibt sich durch folgende Annahme:

$$G_a(p \supset (q \supset (p \wedge q))$$

Durch zweimalige epistemische Abtrennung und Importation ergibt sich: $G_a p \wedge G_a q \supset G_a(p \wedge q)$

- Wir können Konjunktivität als Axiom postulieren:

$$\text{Axiom} \;\; \vdash G_a p \wedge G_a q \equiv G_a(p \wedge q)$$

Das ist eine Idealisierung, allerdings eine sehr begrenzte.

- Dies ist eine Idealisierung *wegen* der beiden l-Theoreme.
- Beide l-Annahmen (und entsprechend das Axiom) erscheinen jedoch als harmlose Wissensunterstellungen. Epistemischen Subjekten wird die Kenntnis der Konjunktion zugeschrieben.

l-Postulate

- Als Alternative zur Logischen Allwissenheit bieten sich Enumerationen von l-Postulaten an (d.h. Listen von einfachen logischen Wahrheiten, die jeder als wissend angenommen werden kann).
- Beispiele:

  l-Postulat $\vdash W_a(p \supset p \vee q)$

  l-Postulat $\vdash W_a((p \supset q) \supset (\neg q \supset \neg p))$

- Das Axiom $\vdash W_a(p \vee \neg p)$ ist eigentlich auch nur ein l-Postulat.

• Grundsätzlich sollten wir annehmen, dass alle Axiome auf der Liste der gewussten logischen Wahrheiten auftauchen, also insbesondere:

l-Postulat $\vdash W_a((\forall b)(\forall p)(W_b p \supset p))$

l-Postulat $\vdash W_b((\forall a)(\forall p)(G_a p \supset \neg G_a \neg p))$

usw.

• Sicher nicht auftauchen sollten in einer solchen Liste die von Relevanten Logiken kritisierten ‚Paradoxien der materialen Implikation' wie *ex falso quodlibet* (d.h.

$p \wedge \neg p \supset q$ bzw. $p \supset (\neg p \supset q)$

Diagramme möglicher Wahrheiten

$$\begin{tikzcd}
 & (\forall a)(\exists t)W_a t \arrow[dr] & \\
(\forall a)(\forall t)W_a t \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\exists a)(\exists t)W_a t \\
 & (\exists a)(\forall t)W_a t \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- Die Pfeile entsprechen PL1-Implikationen.
- D.h. die Zurückweisung der unteren Formel erfordert die der linken Formel. Das Axiom bedingt die rechte Formel.

• Eine Variante (Spiegelung) mit den Negationen:

$$\begin{tikzcd}
 & (\forall a)(\exists t)\neg W_a t \arrow[dr] & \\
(\forall a)(\forall t)\neg W_a t \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\exists a)(\exists t)\neg W_a t \\
 & (\exists a)(\forall t)\neg W_a t \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

• Die obere Formel (ein Axiom) entspricht der Negation der unteren Formel aus vorherigem Diagramm, deshalb wird auch die rechte Formel akzeptiert. Die linke Formel (totaler Skeptizismus) wird zurückgewiesen und widerspricht auch der rechten Formel aus vorherigem Diagramm, die galt.

• Wahrheitsquantoren am Anfang:

$$\begin{tikzcd}
& (\forall t)(\exists a)W_a t \arrow[dr] & \\
(\forall t)(\forall a)W_a t \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\exists t)(\exists a)W_a t \\
& (\exists t)(\forall a)W_a t \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

• Die obere Formel muss zurückgewiesen werden (s.u.), also erst recht die linke. Die untere Formel ergibt sich aus dem Wissensaxiom bezüglich „$p \vee \neg p$“.

- Negation mit Wahrheitsquantoren am Anfang:

$$\begin{tikzcd}
 & (\forall t)(\exists a)\neg W_a t \arrow[dr] & \\
(\forall t)(\forall a)\neg W_a t \arrow[ur] \arrow[dr] & & (\exists t)(\exists a)\neg W_a t \\
 & (\exists t)(\forall a)\neg W_a t \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

- Auch hier wird sich zeigen, dass die untere Formel akzeptiert werden muss, also die rechte. Die linke Formel widerspricht dem Nichtunwissenheitsaxiom $\vdash(\forall a)(\exists p)W_a p$. Die obere Formel widerspricht dem Wissensaxiom $\vdash W_a(p \vee \neg p)$, insofern das Nichtunwissenheits*theorem*.